**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Nela Horvatić

# RAZUMIJEVANJE GRAFIČKOG PRIKAZA LINEARNE FUNKCIJE U INTERDISCIPLINARNOM KONTEKSTU

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _______________________________ , predsjednik
2. _______________________________ , član
3. _______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ___________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _______________________________
2. _______________________________
3. _______________________________

*Zahvaljujem mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš, na ukazanom povjerenju tijekom izrade diplomskog rada kao i na velikoj motivaciji posljednjih godina mog visokoškolskog obrazovanja.*

*Posebno hvala mojoj majci, sestrama i dečku na bezuvjetnoj podršci i razumijevanju!*

# Sadržaj

# Uvod

Matematika je raširena u gotovo svim područjima života. Već od malena učimo brojati, a male, svakodnevne stvari, nesvjesno nas traže da koristimo matematiku. Ljudi je često smatraju apstraktnom i teškom iz iskustva škole, stoga je važno još u obrazovanju proširiti njezinu važnost u svakodnevnom životu. Jedan od ciljeva suvremenog obrazovanja je smanjivanje granice između školskih predmeta te snalaženje i rješavanje problema situacija iz svakodnevnog života.

Mnogi podatci prikazani su grafičkim prikazom, a učenici i studenti često su pozvani interpretirati pojmove nagiba (koeficijenta smjera) pravca i površine ispod grafa (određenog integrala funkcije). Cilj ovog diplomskog rada je proučiti razumijevanje tih pojmova u matematici kao i na kontekstu van matematike te uočiti kako je njihova povezanost prisutna među učenicima i studentima.

Diplomski rad podijeljen je na četiri poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi linearne funkcije iz osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja. U drugom poglavlju opisani su rezultati istraživanja provedenih u Hrvatskoj o razumijevanju grafičkog prikaza linearne funkcije. Uz istraživanje učenika i studenata, opisano je i istraživanje nastavnika fizike o povezanosti matematike i fizike te težini pojedinih zadataka za učenike. Treće poglavlje donosi preporuke za poučavanje u nastavi matematike u kojem su dani primjeri zadataka za učenike temeljeni na uočenim poteškoćama u razumijevanju grafičkog prikaza linearne funkcije. Posljednje poglavlje sadrži aktivnosti koje se mogu provesti u prvom razredu srednje škole, povezujući koncept nagiba pravca kao brzine promjene te koncept površine ispod grafa kao ukupnu promjenu.

**Napomena 0.0.1.** *Linijski graf u ovom radu podrazumijevamo kao graf po dijelovima linearne funkcije („razlomljeni pravac“).*

# Poglavlje 1

# Linearna funkcija

Pojam funkcije, posebno linearne funkcije prvi puta se spominju na kraju sedmog razreda osnovne škole, u nastavnoj cjelini „Linearna funkcija i jednadžba pravca“, a zatim i u prvom razredu srednje škole u nastavnoj cjelini „Linearna funkcija“. Time je obuhvaćeno gotovo svo potrebno znanje učenika o linearnoj funkciji. No, pokazuje li to znanje i dobro razumijevanje, pogotovo u nematematičkom kontekstu, pitanje je na koje tražimo odgovor.

## 1.1 Linearna funkcija u osnovnoj školi

Prema *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* ili, kraće, *NOK*-u, na kraju trećeg obrazovnog ciklusa (odnosno na kraju osmog razreda osnovne škole) od učenika se očekuje da će:

- prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički, opisati takve prikaze te ih prevesti s jednoga na drugi
- nacrtati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini točku zadanu koordinatama i pravac zadan jednadžbom te očitati koordinate točke
- usporediti, procijeniti i izmjeriti duljinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu i kut te izračunati površinu i prosječnu brzinu
- tumačiti i analizirati podatke prikazane na različite načine

Osim matematičkih koncepata, u *NOK*-u je, unutar matematičkih procesa naglasak stavljen na povezivanje te prikazivanje i komunikaciju. Od učenika se očekuje da će organizirano prikazati matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja riječima, slikama, crtežima, grafovima, simbolima i misaono te uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem.

Prema [1], prije definiranja samog pojma linearne funkcije, učenici otkrivaju pravilo pridruživanja te pojam funkcije:

**Napomena 1.1.1** *Ovisnost dviju veličina u matematici zapisujemo formulom. Ako npr. imamo dvije proporcionalne veličine $x$ i $y$, onda kao što znamo, vrijedi da je $\frac{y}{x} = k$, tj. da je $y = k \cdot x$.*

**Definicija 1.1.2.** *Za svaki zadani x možemo izračunati pripadni y. Na taj način svakoj vrijednosti x pridružujemo točno jednu vrijednost y. Takvo pridruživanje zovemo **funkcija** i zapisujemo je formulom $y = kx$ ili $f(x) = kx$.*

Učenici se upoznaju sa zapisom $y = ax$ te pridruživanje zapisujemo kao $x \mapsto ax$. Kako $y$ jednoznačno ovisi o *x*, pišemo $y = f(x), f(x) = ax$. $f(x)$ je *vrijednost* funkcije, a $x$ se naziva *argument* funkcije. Učenici otkrivaju funkcije oblika $f(x) = x + a$ i $f(x) = ax + b$ te se dolazi do definicije linearne funkcije.

**Definicija 1.1.3.** ***Linearna funkcija*** *je funkcija zadana formulom $f(x) = ax + b$ ili $y = ax + b$. Brojeve $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazivamo **koeficijenti** linearne funkcije, $\boldsymbol{x}$ nazivamo **argument** funkcije, a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ vrijednost funkcije. $\boldsymbol{x}$ je nezavisna, a $\boldsymbol{y}$ zavisna varijabla.*

Linearna funkcija definirana je za sve realne brojeve, no kako se pojam linearne funkcije obrađuje u sedmom, a pojam realnih brojeva tek u osmom razredu, učenici shvaćaju linearnu funkciju kao pridruživanje između skupova racionalnih brojeva. Nakon pojma linearne funkcije, učenici otkrivaju pojam nultočke funkcije te monotonost funkcije.

**Definicija 1.1.4.** ***Nul-točka*** *linearne funkcije $y = ax + b$ je broj $x_0$ za koji je vrijednost funkcije jednaka 0, tj. za koji vrijedi da je $ax_0 + b = 0$.*

Linearna funkcija može biti rastuća i padajuća. Ako je funkcija rastuća, onda se povećanjem argumenta *x* funkcije *f*, poveća i vrijednost $f(x)$ funkcije *f*, a ako se povećanjem argumenta *x* funkcije *f*, vrijednost $f(x)$ funkcije *f* smanji, onda je funkcija *f* padajuća. Ovo svojstvo najčešće zapisujemo simbolima:

- *$f$ je rastuća ako* $(\forall x_1, x_2)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *$f$ je padajuća ako* $(\forall x_1, x_2)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Nakon monotonosti, interpretiramo koeficijente linearne funkcije. Za linearnu funkciju $f(x) = ax + b, a \neq 0$, slobodni koeficijent $b$ je vrijednost linearne funkcije u nuli, a vodeći koeficijent $a$ govori nam za koliko se promijeni vrijednost funkcije $f(x)$ ako se vrijednost argumenta funkcije $x$ poveća za 1. Također, monotonost funkcije ovisi o njezinu vodećem koeficijentu. Ako je vodeći koeficijent pozitivan, onda je linearna funkcija rastuća, a ako je vodeći koeficijent negativan, onda je linearna funkcija padajuća. Ovo možemo zapisati:

- $a > 0 \Rightarrow$ *funkcija f je rastuća*
- $a < 0 \Rightarrow$ *funkcija f je padajuća*

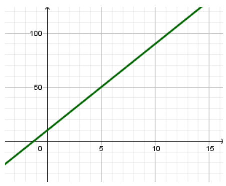
Nakon usvajanja ovih osnovnih pojmova, učenici otkrivaju graf linearne funkcije. Najprije se povezuju parovi $(x, f(x))$ zadani pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$ s točkama koordinatne ravnine, pazeći na njihov poredak $\big(x, f(x)\big) \neq \big(f(x), x\big)$. Učenici uočavaju da svi uređeni parovi $\big(x, f(x)\big)$ odgovarajuće linearne funkcije pripadaju jednom pravcu u koordinatnom sustavu. Kako se pravac na latinskom jeziku naziva *linea*, funkcija $f$ zadana pravilom $f(x) = ax + b$ naziva se linearna funkcija zato što je graf te funkcije pravac $y = ax + b$ što otkrivamo s učenicima.

**Definicija 1.1.5.** ***Graf linearne funkcije*** $y = ax + b$ *u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini je pravac. Jednadžba tog pravca je* $y = ax + b$.

Funkcija može biti zadana formulom, tablicom, grafom ili tekstom, kao što je prikazano na slici 1.1:

$f(x) = 8x + 10$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 18 | 26 | 34 |




Polazna taksa za vožnju taksijem iznosi od 10 kuna, a svaki prijeđeni kilometar naplaćuje se 8 kn.

Slika 1.1: Zadavanje funkcije formulom, tablicom, grafički i tekstom

Nakon uspostavljanja veze između linearne funkcije i pravca kao njezinog grafičkog prikaza, učenici otkrivaju pojmove *odsječak pravca na osi y* i *nagib pravca* te povezuju njihove vrijednosti s grafičkim prikazom linearne funkcije.

**Definicija 1.1.6.** *Ako je jednadžba pravca napisana u obliku* $y = ax + b$, *kažemo da je zapisana u eksplicitnom obliku. Parametar* ***a*** *naziva se* ***nagib*** *ili* ***koeficijent smjera****, a parametar* ***b odsječak na osi y.***

U ovom dijelu, učenici različitim primjerima povezuju vrijednost nagiba pravca sa grafičkim prikazom linearne funkcije što je njihov prvi susret s tim pojmom.

Nakon grafičkog prikaza i toka linearne funkcije, obrađuje se nastavna cjelina „Jednadžba pravca“ u kojoj učenici otkrivaju načine dobivanja jednadžbe pravca te ih povezuju s pripadnom linearnom funkcijom.

Osim u matematici, u osmom razredu osnovne škole učenici koriste graf linearne funkcije u grafičkom prikazu gibanja i brzine tijela u $s - t$ i $v - t$ grafu. Najčešće se prikazuje jednoliko pravocrtno i jednoliko ubrzano gibanje. Ono što se najčešće navodi jest da se ovisnost prijeđenog puta o vremenu prikazuje $s - t$ grafom, gdje je $s - t$ graf pravac koji je nagnut na os $t$, a nagib pravca ovisi o brzini tijela. Što se tijelo giba većom brzinom, to je nagib grafa na os $t$ veći. Iz $s - t$ grafa se mogu očitati put i vrijeme te se može odrediti brzina i uspoređivati različite brzine. Ovisnost brzine o vremenu prikazuje se $v - t$ grafom. Površina ispod $v - t$ grafa odgovara prijeđenom putu, pa možemo reći da se iz $v - t$ grafa može očitati brzina i vrijeme, ali i odrediti put kao površina ispod grafa te akceleracija kao nagib pravca.

## 1.2 Linearna funkcija u srednjoj školi

U nastavku školovanja, učenici proširuju svoje znanje o linearnoj funkciji, a najviše je se dotiču u prvom razredu srednje škole. Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu, na kraju četvrtog obrazovnog ciklusa, od učenika se očekuje da će:

Strukovne škole

- opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti iz jednoga od navedena četiri oblika u drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)
- prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstremi, točke važne za određenu situaciju), te uspoređivati jednostavne grafove

Gimnazije

- opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti iz jednoga od navedena četiri oblika u drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)

- prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne funkcije te rabiti njihova svojstva
- računski, grafički i uz pomoć računala, u skupu realnih brojeva riješiti linearne jednadžbe i nejednadžbe i sustave jednadžba
- primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnom životu

U srednjoj školi linearna funkcija se definira slično, ali preciznije od osnovne škole. Prema [3] dajemo iskaz definicije linearne funkcije.

**Definicija 1.2.1.** ***Linearna funkcija*** *je pridruživanje kojim nekom broju x pridružujemo broj* $f(x)$ *pri čemu je* $f(x) = ax + b, a \neq 0$. *Broj* $a \neq 0$ *zove se* ***vodeći koeficijent*** *linearne funkcije, a b* **slobodni koeficijent.** *Pravac* $y = ax + b$ *graf je linearne funkcije.*

Detaljnije ćemo spomenuti sadržaj matematike u općoj gimnaziji. Prije pojma linearne funkcije, usvaja se pojam linearne jednadžbe i pravca kao njezinog grafa, te se utvrđuju načini dobivanja jednadžbe pravca (kroz dvije točke, sa zadanom jednom točkom i koeficijentom smjera). Zatim se linearna funkcija povezuje se s jednadžbom pravca. U nastavnom sadržaju, utvrđuju se pojmovi nultočke funkcije i tok funkcije te interpretiraju koeficijenti, a naglasak je i na tumačenju grafičkog prikaza linearne funkcije. Najčešće se na temelju teksta zadatka određuje pripadna (po dijelovima) linearna funkcija i njezin graf, a uz to i određuju argumenti ili vrijednosti te funkcije u zadanim pitanjima. Također, određuje se i neki „prosjek“ danog grafičkog prikaza, odnosno ono što tumačimo kao nagib pravca. On se tumači kao omjer promjene vrijednosti funkcije i odgovarajuće promjene argumenata funkcije te se zaključuje da je on isti za prikazanu linearnu funkciju. Površina ispod grafa linearne funkcije spominje se eventualno u zadacima iz područja fizike ($s - t$ graf). Neke od primjera zadataka iz [3] na području linearne funkcije navodim i u ovom radu:

**Primjer 1.2.2.** *Nacrtaj graf linearne funkcije* $f(x) = ax + b$ *ako je* $f(-5) = 5$, $f(4) = 4$. *Koliki je nagib te funkcije? U kojoj točki graf funkcije siječe os y?*

**Primjer 1.2.3.** *Zadana je funkcija* $f(x) = 2x + 1$.

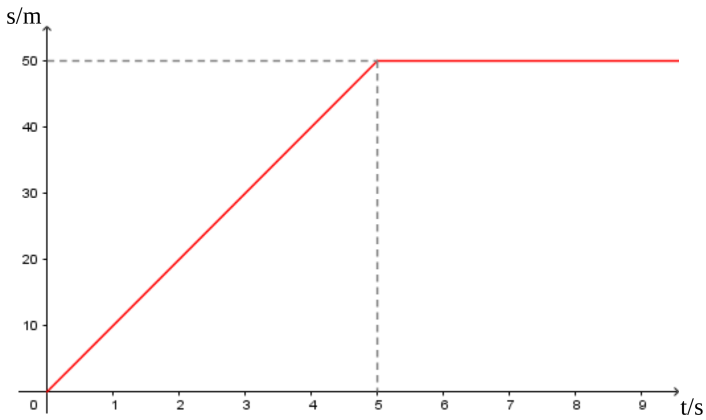
1. *Nacrtaj graf ove funkcije.*
2. *Odredi njezinu nultočku*
3. *Za koje je vrijednosti x ispunjena nejednakost* $f(x) \geq -1$?

4. *Kolika je promjena vrijednosti funkcije kada vrijednost varijable x naraste od -1 na 2?*
5. *Uvjeri se da je* $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 2$ *za svaka dva različita realna broja* $x_1$ *i* $x_2$.

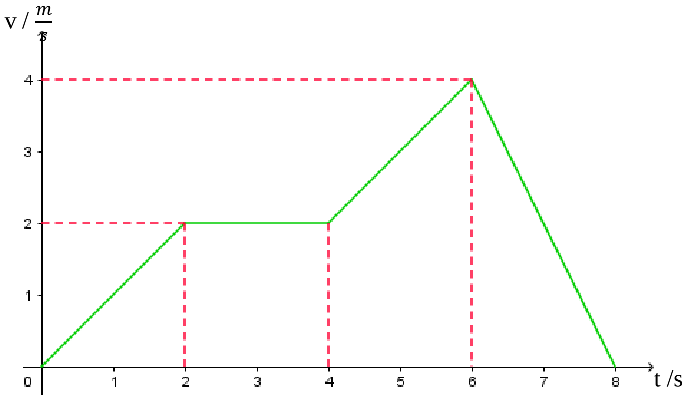
**Primjer 1.2.4.** *Serviser kućanskih aparata naplaćuje dolazak u kuću 50 kn, a svaki sat rada cijeni 75 kn. Koliko će serviser naplatiti svoj rad koji je trajao:* $\frac{1}{2}$ *sata, 1 sat, 1.5 sati, 2 sata, 2.5 sata? Zapiši funkciju koja opisuje cijenu servisa ovisno o vremenu koje je utrošio na popravak aparata.*

U gimnazijama i smjerovima srednje škole u kojoj učenici imaju predmet Fizika, u prvom se razredu ponovno sreću s pojmovima gibanje, put, brzina i ubrzanje te su pozvani interpretirati i prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu odnose između puta, brzine i akceleracije sa pripadnim vremenom gdje se često susreću s grafičkim prikazom linearne funkcije. Ovdje se i spominje površina ispod grafa linearne funkcije kao i drugih krivulja te se u $v - t$ grafu interpretira kao prijeđen put u danom vremenskom intervalu, odnosno kao promjena brzine u a-t grafu. Navest ćemo neke od primjera zadataka iz [5] i [14] koji su povezani s grafičkim prikazom linearne funkcije:

**Primjer 1.2.5.** *Kakvo gibanje predočuje grafikon na slici? Što možete reći o brzini tijela? Odredi put što ga je tijelo prešlo za 3s, 5s i za 9s.*



**Primjer 1.2.6.** *Tijelo se giba pravocrtno kako prikazuje* $(v - t)$ *graf.*




*a) Opiši gibanje!*
*b) Odredi brzinu na kraju 2., 4. i 6. sekunde!*
*c) Odredi srednju brzinu gibanja!*
*d) Nacrtaj* $(a - t)$ *graf!*

Pitamo se, mora li se površina ispod grafa linearne funkcije interpretirati samo u matematičkom ili fizikalnom kontekstu? Što je sa ostalim zadacima iz svakodnevnog života? Razumiju li učenici što u takvim zadacima predstavlja nagib pravca ili površina ispod grafa linearne funkcije danog problema? Različitim istraživanjima, pokazalo se da učenici nailaze na poteškoće u takvim zadacima što ćemo i detaljnije opisati u sljedećem poglavlju.

# Poglavlje 2

# Rezultati istraživanja

Provedena su mnogobrojna istraživanja učeničkog i studentskog razumijevanja grafičkog prikaza linearne funkcije koja daju vrlo slične rezultate - postoje poteškoće u razumijevanju grafičkog prikaza koja su pokazana u rješavanju zadataka zadanih grafičkim prikazom. Neke od takvih konkretnih rezultata istraživanja opisat ću u ovom poglavlju. Rezultati se temelje na dva istraživanja¸u Hrvatskoj: na istraživanju provedenom na učenicima 2. razreda srednje škole (vidi [8]) te na istraživanju provedenom na studentima prve godine Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (vidi [6] i [7]).

## 2.1 Istraživanje u srednjoj školi

Prvo istraživanje sastojalo se od po dva paralelna pitanja matematike i fizike koja su uključivala procjene i tumačenja nagiba pravca (Slika 2.1). Pitanja su bila uključena u duljem istraživačkom testu o razumijevanju grafova. Svaki par pitanja zahtijevao je istu vještinu rješavanja, ali u različitim kontekstima – jedno u kontekstu matematike, a drugo u kontekstu fizike (kinematike).

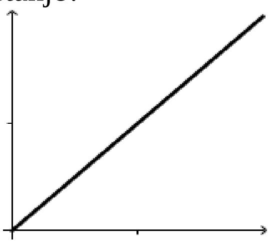
Prvi par pitanja (M1 i P1) odnosio se na pozitivan nagib pravca, a drugi par (M2 i P2) na negativan. Glavno pitanje istraživanja bilo je: Kako se sposobnost učenika da procijeni i tumači nagibe linijskog grafa u matematici odnosi na njihovu sposobnost procjene i tumačenja nagiba linije grafikona u fizici, npr. kinematici? Cilj je bio utvrditi je li nedovoljno znanje iz matematike glavni razlog što se javljaju poteškoće kod interpretiranja grafova iz kinematike te odrediti koje su to poteškoće u kontekstu matematike i fizike u interpretaciji nagiba pravca.

Analiza odgovora i objašnjenja učenika pokazala je da nedostatak matematičkog znanja nije glavni razlog za poteškoće razumijevanja grafova u kinematici. Čini se da najveći problem za učenike predstavlja tumačenje značenja nagiba pravca u kontekstu fizike, iako, učenici su pokazali poteškoće u razumijevanju pojma nagiba i u matematičkom kontekstu.

U pitanjima M1 i P1 od učenika se očekivalo da razmišljaju o nagibu pravca tako da se nagib prepoznaje kao konstantan i različit od nule, a u pitanju P1 nagib protumači i kao veličina brzine. U pitanjima M2 i P2 od učenika se očekivalo da prepoznaju da je nagib grafa bio konstantan i negativan, a u pitanju P2 i da se nagib pravca tumači kao veličina ubrzanja.

<table>
<tr>
<td>

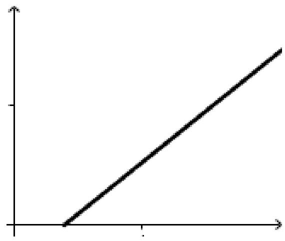
**P1.** Prikazan je put - vrijeme graf objekta u pokretu. Koja rečenica najbolje opisuje njegovo kretanje?



A. Objekt se ne kreće<br>
B. Objekt se kreće konstantnom brzinom<br>
C. Objekt se kreće jednoliko usporeno<br>
D. Objekt se kreće jednoliko ubrzano

</td>
<td>

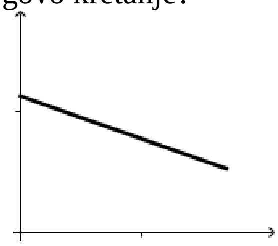
**M1.** Promotri sljedeću dužinu (zraku) u koordinatnom sustavu. Koja rečenica je točna?



A. Nagib pravca je konstantan i različit od nule<br>
B. Nagib pravca je konstantan i jednak nuli<br>
C. Nagib pravca konstantno raste<br>
D. Nagib pravca konstantno pada

</td>
</tr>
<tr>
<td>

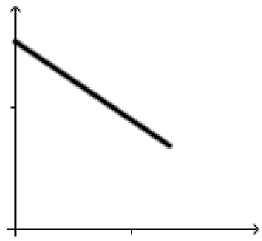
**P2.** Prikazan je brzina - vrijeme graf objekta u pokretu. Koja rečenica najbolje opisuje njegovo kretanje?



A. Objekt se kreće konstantnom akceleracijom različitom od nule<br>
B. Objekt se kreće akceleracijom jednakom nuli<br>
C. Objekt se kreće s konstantnim povećanjem akceleracije<br>
D. Objekt se kreće s konstantnim smanjenjem akceleracije

</td>
<td>

**M2.** Promotri sljedeću dužinu (zraku) u koordinatnom sustavu. Koja rečenica je točna?



A. Nagib pravca je konstantan i pozitivan<br>
B. Nagib pravca je konstantan i negativan<br>
C. Nagib pravca konstantno se smanjuje i negativan je<br>
D. Nagib pravca konstantno se smanjuje i pozitivan je

</td>
</tr>
</table>

Slika 2.1: Paralelna pitanja iz provedenog istraživanja

U pitanjima M1 i P1 od učenika se očekivalo da razmišljaju o nagibu pravca tako da se nagib prepoznaje kao konstantan i različit od nule, a u pitanju P1 nagib protumači i kao veličina brzine. U pitanjima M2 i P2 od učenika se očekivalo da prepoznaju da je nagib grafa bio konstantan i negativan, a u pitanju P2 i da se nagib pravca tumači kao veličina ubrzanja.

Poredavši zadatke po točnosti rješavanja učenika, to su redom M1, M2, P1 i P2 prema čemu je zaključeno da su učenici bolje rješavali zadatke u matematičkom kontekstu.

U oba konteksta, fizike i matematike, najčešća učenička greška je bila **zamjena nagiba pravca s „visinom grafa“** (funkcijskom vrijednosti), ali mnogo češća u kontekstu fizike. Na primjer, često se prikaz padajuće funkcije u $v - t$ grafu tumačio kao gibanje tijela s padajućom akceleracijom. Učenici primjećuju da je prikazano gibanje jednoliko usporeno, ali onda ga pogrešno povezuju sa smanjenjem akceleracije. Tako pokazuju da ne razumiju niti koncept ubrzanja niti koncept nagiba pravca u $v - t$ grafu. Analogno, učenici nisu povezivali nagib pravca u $s - t$ grafu s veličinom brzine tijela što je očito povećalo poteškoće u rješavanju zadatka P1 u usporedbi sa zadatkom M1.

Jedna od poteškoća u rješavanju problema u fizici smatra se i **generiranje vizualne slike** pri tumačenju grafa. Naime, fizikalni problemi sadrže više „stvarnog“ što učenike potiče na vizualiziranje problema, dok su matematički problemi većinom izravni i više apstraktni što ih često dovodi do krivih zaključaka.

Također**, negativan nagib pravca** se pokazao težim konceptom nego pozitivan nagib u oba konteksta, ali je više bilo izraženo za pojmove ubrzanja i brzine (fizikalni konteksti).

Iz učenikovih objašnjenja moglo se zaključiti i da neki učenici imaju tendenciju **pripisati nulu vrijednosti nagiba pravca koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava**, dok drugi pridružuju **vrijednost nagiba kvadrantu** u kojemu je pravac nacrtan. Mnogi učenici koji su bili u stanju procijeniti je li nagib pravca konstantan (kao što je vidljivo iz njihovih odgovora na pitanje M2) nisu uspijevali zaključiti da je ubrzanje konstantno u P2. Ovo očito nije posljedica njihova nedostatka matematičkog znanja, nego **nedostaje veza između matematike i fizike** te **nedostatka relevantnih konceptualnih znanja o** fizici. Učenici vjerojatno nisu svjesni da je problem u P2 matematički isti kao i problem u M2, jer oni ne vide ubrzanje kao nagib $v - t$ grafa. Također, učenikovo razumijevanje koncepta ubrzanja očito je problematično - neki povezuju konačnu promjenu brzine s trenutnim vremenom umjesto s konačnim intervalom vremena (zamjena interval/točka) i mnogim razmišljanjima da jednoliko usporeno podrazumijeva smanjenje ubrzanja.

### 2.1.1 Istraživanje nastavnika fizike

Uz učenike, provedeno je i istraživanje nastavnika fizike vezano uz ove zadatke. Naime, provedena je anketa na 90 nastavnika fizike o tome da poredaju ova četiri pitanja, prema njihovom mišljenju, od najtežeg do najmanje teškog pitanja za učenike. Najčešće je to bio poredak M2, M1, P2, P1, gdje vidimo da su nastavnici izrazili da je matematički kontekst za učenike teži od konteksta fizike. Zbrojivši sve kombinacije da su oba pitanja matematike navedena prije pitanja fizike, pokazano je da 37% nastavnika dijeli to mišljenje, što je suprotno rezultatima istraživanja. Time je potvrđeno vjerovanje mnogih nastavnika fizike koji i dalje vjeruju da je nedostatak matematičkih znanja učenika glavni uzrok poteškoća s fizikom. Mnogi nastavnici iz ovog istraživanja smatraju da je matematički kontekst teži jer je više apstraktan, dok su fizikalne stavke bliže stvarnom životu i manje apstraktne pa bi trebale biti lakše za učenike.

## 2.2 Istraživanje na sveučilišnoj razini

Drugo istraživanje provodilo se na 385 studenata prve godine Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te su rezultati objavljeni u člancima (vidi [6] i [7]). Sastojalo se od osam paralelnih pitanja o interpretaciji grafova kroz tri različita konteksta: matematike bez konteksta (M domena), fizike (P domena) i matematike u kontekstu izvan fizike (C domena). Cilj ovog istraživanja bio je utvrditi je li veća težina zadataka iz fizike posljedica nedostatka dovoljnog znanja fizike ili bi isto bilo i sa nekim drugim kontekstom van fizike, a koji ne zahtijeva neko dodatno znanje. Pokušalo se istražiti i usporediti strategije i teškoće interpretiranja linijskih grafova. Ispitivalo se tako da se od studenata uz njihove odgovore tražilo i objašnjenje i/ili matematički postupak. Rezultati istraživanja objavljeni su u dva članka iz kojih ću iznijeti najvažnije činjenice za ovaj rad.

Upitnik je bio napravljen tako da su se prvo odabrala fizikalna pitanja te su na temelju njih izrađena matematička i druga kontekstualna pitanja. Svaki od osam skupina pitanja zahtijevao je isti matematički postupak, ali u tri različita konteksta. Od tih skupina, pet ih se odnosilo na koncept nagiba grafa i tri na koncept površine ispod grafa. Četiri skupine pitanja bile su u formi višestrukog izbora, a preostala četiri otvorenog tipa uz traženo objašnjenje i/ili račun za svoje odgovore. Promatrat ćemo općenito rješavanje zadataka u različitim domenama te posebno strategije i poteškoće u rješavanju.

### 2.2.1 Usporedba težine razumijevanja grafičkog prikaza u različitim kontekstima

Utvrđeno je da je mali dio studenata koristio istu strategiju u sve tri domene u skupovima paralelnih pitanja, tj. one su ovisile o kontekstu i specifičnosti područja. Usporedbom prosječne težine domena pokazalo se da je matematika bez konteksta najjednostavnija domena za studente. Suprotno pretpostavkama, nije bilo značajnije razlike u prosjeku rješavanja problema u fizici i kontekstima koji nisu fizika, što ukazuje na to da fizika, unatoč poučavanjem u osnovnoj i srednjoj školi, ostaje težak kontekst za većinu studenata.

Koncept nagiba u sve tri domene je blizu prosjeka teškoća ili lakši te razlike u domenama nisu velike. Rezultati pokazuju da je u matematičkoj domeni koncept nagiba studentima lakši nego u fizici, a zbog velike nesigurnosti prosječne težine u C domeni, ova domena se ne može jasno uspoređivati s M i P domenom. U domenama M i C učenikovo razmišljanje se često temeljilo na konceptu nagiba, dok je u kontekstu fizike velik broj studenata koristio drugačije strategije, najčešće formule.

Koncept površine ispod grafa dramatično se razlikuje između konteksta matematike s jedne strane te fizike i matematike u kontekstu izvan fizike s druge strane. Naime, rezultati pokazuju da je koncept površine ispod grafa u M domeni puno lakši nego isti u P i C domeni, ali i mnogo lakši od koncepta nagiba u bilo kojoj domeni. S druge strane, koncept površine ispod grafa u P i C domeni stvara veće poteškoće od koncepta nagiba u bilo kojoj domeni. Zbog velikih nesigurnosti teškoća fizike i matematike u kontekstu izvan fizike, razlike u teškoćama ovih dviju domena se ne mogu odvojiti, ali su studentima podjednako teške.

Ukratko, istraživanje ukazuje na to da studenti imaju mnogo poteškoća s razumijevanjem linijskih grafova te da kontekst problema može utjecati na izbor studentske strategije, kao i na tip poteškoće koji pritom može nastati.

### 2.2.2 Strategije i poteškoće razumijevanja grafičkog prikaza

Rezultati istraživanja otkrili su razlike u studentovim razumijevanjima koncepta nagiba grafa i koncepta površine ispod grafa. Pokazalo se da studenti bolje razumiju koncept nagiba nego površine ispod grafa čije je tumačenje značenja predstavljalo najveći problem za studente u istraživanju. Razlog tome mogao bi biti da se tijekom nastave više stavlja naglasak na tumačenje nagiba nego tumačenje površine ispod grafa. Strategije i poteškoće svrstane su u kategorije te su podatci sažeti i u tabličnom obliku, a neke manje učestale kategorije spojene su u veće kako bi opći obrasci podataka bili vidljiviji. Na temelju učestalosti korištenja različitih studentovih strategija prepoznale su se neke netočne strategije kao moguće indikacije o poteškoćama učenika s interpretacijom grafova.

#### 2.2.2.1 Glavne kategorije strategija i poteškoća istraživanja

Pitanja istraživanja bila su:

I. Koliko su studenti konzistentni u njihovom izboru strategije i rješenja za paralelna pitanja u različitim domenama i kontekstu?
II. Koje su glavne poteškoće studenata u svakoj domeni i kako se odnose prema kontekstu pitanja?

Odgovori na pitanja istraživanja raspoređeni su u nekoliko glavnih kategorija: 1 - 3. daju rezultate za prvo pitanje, a 4 – 6. za drugo pitanje.

**1. Strategije korištene na paralelnim pitanjima su često ovisne o kontekstu i specifične za domenu**

Samo mali dio studenata koristio je istu strategiju na sva tri pitanja iste skupine. Pokazalo se da ako su studenti naučili postupak za neku specifičnu domenu (npr. određivanje nagiba pravca u matematici pomoću matematičkih formula ili izračunavanje ubrzanja pomoću formula iz fizike), oni će se držati tih postupaka i neće uočiti sličnost u rješavanju problema između različitih domena. Taj problem često se naziva i „uokviravanje“ (eng. framing).

**2. Preferirana strategija na pitanjima fizike je korištenje formula**

Studenti su vrlo često u domeni fizike koristili formulu $a = v/t$ čime se pokazalo da mnogi ne shvaćaju sam smisao koncepta ubrzanja niti su razumjeli područje primjenjivosti formula koje se koriste u fizici. Rezultati ukazuju na to da studenti ne vide formule kao matematičke modele situacija iz fizike, pa se ne može ni očekivati da će interpretirati ubrzanje kao nagib $v - t$ grafa.

**3. Studenti više koriste neke kreativne strategije na problemima C domene nego na problemima fizike**

Kako su studenti u problemima s fizikom često (na pogrešan način) koristili formule, na zadacima s matematičkim kontekstom izvan fizike studenti su aktivirali više kognitivnih resursa i pokazali širi raspon strategija rješavanja, a u nekim skupovima pitanja dvostruko je više studenata došlo do ideje za računanjem površine ispod grafa nego u domeni fizike. Čak su koristili i neki oblik prostorne analize koji je inače specifičan za fiziku.

**4. Studenti pokazuju slične poteškoće s tumačenjem grafova u svim područjima**

Promatrane su zamjena nagib - visina, interval - točka te slikovna zabuna. Isti obrasci ovog razmišljanja bili su prisutni u sve tri domene, ali ne i jednako često. Najčešća zamjena nagib - visina bila je u problemima u kojima se smanjuje visina grafa te su studenti za nagib ili veličinu povezanu s nagibom zaključili da se i ona smanjuje. Zamjena interval - točka najjasnije je prikazana u problemima kada se o nagibu razmišljalo na temelju formule $a = v/t$ pri čemu su studenti pokazali da ne znaju kada koristiti interval, a kada točku. Slično su računali i u kontekstu matematike te matematike u kontekstu izvan fizike, gdje su nagib računali kao $y/x$ ili cijena/vrijeme. Djelomično bi se moglo objasniti korištenjem formula u fizici ili nerazumijevanjem simbola delta ili značenja konteksta stopa.

**5. Koncept nagiba linijskog grafa je nejasan za mnoge studente**

Na svim matematičkim zadacima s konceptom nagiba linijskog grafa studenti su često davali nejasna objašnjenja što ukazuje na to da nisu znali objasniti pojam nagiba. Također, pokazane su poteškoće u razumijevanju značenja negativnog nagiba za koje pokazuju da ne razumiju u potpunosti koncept, ali imaju neko vizualno pravilo za prepoznavanje. Dodatne strategije i teškoće u konceptu nagiba navedene su niže (Tablica 2.2.), a neke od njih i posebno opisane.

**6. Tumačenje površine ispod grafa je vrlo teško za studente**

Većina studenata znalo je kako odrediti površinu ispod grafa, ali veći je problem bio kako protumačiti njegovo značenje. Mali broj studenata tumačio je površinu ispod grafa u problemima na koje nisu prethodno naišli. Također, veća je vjerojatnost da će bolje protumačiti značenje površine ispod grafa u kontekstu matematike izvan fizike nego u fizici, vjerojatno zbog blokiranja njihova razmišljanja već spomenutim formulama.

U sljedećim redovima, detaljnije ćemo prikazati nama najvažnije koncepte u razumijevanju grafa koji su se proučavali u ovom istraživanju: koncept nagiba linijskog grafa i koncept površine ispod linijskog grafa.

### 2.2.2.2 Strategije i poteškoće studenata u konceptu nagiba grafa

U sljedećoj tablici navedene su strategije i poteškoće studenata dobivene analizom istraživanja u vezi koncepta nagiba grafa, a neke (proizvoljno odabrane) od njih su i opisane ispod tablice.

| **A. STRATEGIJE I POTEŠKOĆE STUDENATA U KONCEPTU NAGIBA GRAFA** |
|---|
| **1.** Upotreba formule (točna ili netočna) |
| **2.** Razmišljanje na temelju koncepta „koračaj i skoči“ |
| **3.** Povezivanje/izjednačavanje nagiba grafa sa kutom između grafa i koordinatne osi |
| **4.** Obrazloženje o nagibu grafa na osnovi izgleda grafa |
| **5.** Primjena osnovnog znanja da pravac ima stalan nagib |
| **6.** Izjednačavanje nagiba grafa s „visinom grafa“ (vrijednosti funkcije) |
| **7.** Izjednačavanje nagiba zakrivljene linije u nekoj točki s nagibom tangente u toj točki |

Tablica 2.2: Prikaz strategija i poteškoća studenata u konceptu nagiba grafa

### A1. Upotreba formule (točna ili netočna)

Ova strategija bila je jedna od najčešćih na problemima koncepta nagiba te dominira u sve tri domene, ali su korištene formule bile različite u svakoj domeni. Na matematičkoj, studenti su uglavnom koristili različite formule za računanje nagiba pravca dok su se na domeni fizike koristile (često netočne ili neprikladne) formule za ubrzanje. Vodeća takva formula bila je $a = v/t$. U matematičkom kontekstu van fizike, studenti su izvodili svoje formule, a najviše se od netočno izvedenih koristila $k = y/x$. Neki su koristili formule i pri usporedbi nagiba pravaca ili usporedbi nagiba pravca i krivulje u nekoj točki.

### A2. Razmišljanje na temelju koncepta „koračaj i skoči“

Studenti su ovaj način razmišljanja najčešće koristili pri usporedbi dvaju pravaca, npr. pri usporedbi porasta cijena dviju dionica u isto vrijeme. Također, najviše je ispravno korištena strategija gdje studenti zaključuju da je nagib negativan kada se vrijednost ordinate $y$ grafa smanjuje s porastom vrijednosti apscise $x$. Slično se zaključivalo i pri objašnjenju negativnosti pravca.

### A6. Izjednačavanje nagiba grafa s „visinom grafa“ (vrijednosti funkcije)

Pogreška poznata još od istraživanja u srednjoj školi nije izostala ni u ovom istraživanju. Glavna pogreška u sve tri domene u jednom od skupa pitanja bila je izjednačavanje visine grafa sa nagibom grafa i tumačenje da se vrijednost nagiba pravca stalno smanjuje kao i visina grafa. Tipična objašnjenja bila su: „Iz grafikona vidimo da se brzina smanjuje s vremenom, pa se smanjuje i ubrzanje.“ Također, neki studenti su predznak nagiba pravca izjednačili sa predznakom $y$ koordinate grafa što se isto može smatrati ovom konfuzijom. Na ovaj način, studenti su pokazali nerazumijevanje koncepta nagiba grafa funkcije.

#### 2.2.2.3 Strategije i poteškoće studenata u konceptu površine ispod grafa

U Tablici 2.3 navedene su strategije i poteškoće studenata u vezi koncepta površine ispod grafa, a one najčešće, opisane su ispod tablice.

| **B. STRATEGIJE I POTEŠKOĆE STUDENATA U KONCEPTU POVRŠINE ISPOD GRAFA** |
|---|
| **1.** Izračunavanje površine ispod grafa (potpuno ili nepotpuno) |
| **2.** Korištenje formula iz domene fizike |
| **3.** Čitanje vrijednosti $y$ osi ili $\Delta y$ za pripadni graf |
| **4.** Čitanje $x$ i $y$ vrijednosti te njihovo množenje |
| **5.** Postavljanje nove ljestvice na grafikonu |

Tablica 2.3: Prikaz strategija i poteškoća studenata u konceptu površine ispod grafa

**B1. Izračunavanje površine ispod grafa (potpuno ili nepotpuno)**

Izračunavanje površine ispod grafa samo po sebi nije problem za studente, a najčešće se određivala pomoću formula iz geometrije. U pitanjima gdje se izričito tražio račun površine ispod grafa je najčešće bio i točan, ali u domeni fizike i domeni matematike izvan konteksta fizike izračun površine ispod grafa se mnogo rjeđe koristio. Nerješivost ovih problema može se prepisati nemogućnosti tumačenja površine ispod grafa kao traženi odgovor u zadanom kontekstu što se pokazalo glavnim izvorom poteškoće u tim problemima. Najčešći račun površine ispod grafa u pitanjima matematike u kontekstu (P i C domena) bio je u računanju ukupnog prijeđenog puta na temelju $v - t$ grafa. Međutim, to bi se moglo objasniti činjenicom da se navedeno učilo u srednjoj školi. No usporedbom 10% - 25% studenata koje je izračunalo površinu na P i C domeni sa 80%-90% na domeni matematike bez konteksta rezultat je istraživanja koji jasno govori da se u nastavi mora obratiti više pozornosti na matematiku u svakodnevnom životu te da mora doći do povezivanja „apstraktne“ matematike sa matematikom u kontekstu.

**B2. Korištenje formula iz domene fizike**

Najčešće je korištena strategija na pitanjima fizike, ali zabrinjavajuće je to što je ona bila češće netočno upotrijebljena. Često su se u krivom kontekstu problema upotrebljavale formule $\Delta v = \Delta a \Delta t$, $\Delta v = v_2 - v_1 = a_2 t_2 - a_1 t_1$ i $v = at$. Time su studenti pokazali i loše razumijevanje o simbolu delta (Δ). Zanimljivo, u pitanju C domene je hrvatska riječ za stopu bila riječ brzina te su studenti odmah pokrenuli upotrebu fizikalnih formula, ali i ispravno riješili problem.

**B3. Čitanje vrijednosti $y$ osi ili Δy za pripadni graf**

Ova strategija bila je najčešća na domeni fizike ili matematike izvan konteksta fizike. U pitanjima koja su tražila ukupnu promjenu količine (npr. razine vode rijeke), studenti su najčešće čitali maksimalnu vrijednost ordinate ili određivali razliku vrijednosti pripadnih ordinata. Neki studenti su i množili vrijednosti $x$ i $y$ te tako prezentirali svoj odgovor.

Na temelju ovih istraživanja možemo zaključiti nekoliko činjenica. Glavni rezultat je da kontekst općenito povećava težinu zadatka, tj. da znanje matematike nije glavna prepreka u rješavanju istih. Iako se može reći da se koncept nagiba grafa bolje razumije nego koncept površine ispod grafa, primjećujemo da i koncept nagiba može biti prilično nejasan te se teško tumači u nepoznatim situacijama. Također, važna prepreka u rješavanju problema u domeni fizike predstavlja i upotreba formula koja često čini prepreku dubljeg razmišljanja o zadanom problemu (kao što se pokazalo u zadatcima van konteksta fizike). Tumačenje površine ispod grafa u domeni matematike u kontekstu jedan je od najvećih problema u razumijevanju linijskog grafa. Unatoč mišljenjima nastavnika fizike, nedostatak matematičkih vještina nije glavni uzrok poteškoća s grafovima u fizici. Ako su ovakvi rezultati postignuti na istraživanjima škola sa slušanjem 3 ili više sati tjedno matematike te 2 sata fizike, ali i na studentima kojima bi ovi koncepti trebali biti opće poznati, pitamo se: jesu li ovi koncepti maksimalno dobro razrađeni u srednjoškolskom obrazovanju? Možemo li kako poboljšati jačanje tih veza unutar različitih koncepata i domena?

# Poglavlje 3

# Preporuke za nastavu matematike

Provedena istraživanja pokazala su da odabir učenika u rješavanju odražava tipične ideje i metode koje se koriste u njihovom obrazovanju. Rezultati pokazuju na određenu raspodjelu u domenama i traže jačanje veza unutar različitih, svakodnevnih tema i područja. Kako se pojam nagiba kao brzina promjene i pojam površine ispod grafa najviše spominju u četvrtom razredu srednje škole u kontekstu derivacija i integrala, valjalo bi već u ranijim godinama potaknuti dublje razumijevanje ovih, učenicima često apstraktnih, pojmova.

Neke od preporuka koje su dane u [16], a mogle bi biti korisne za dublje konceptualno razumijevanje derivacija (stopa/brzina promjene) i određenog integrala (ukupnog iznosa promjene, odnosno ukupne promjene količine) u srednjoškolskom programu su:

1. Korištenje dobrih intuitivnih primjera iz „stvarnog života“ kao i jednostavnih primjera iz fizike, posebno kinematike, sa svojim grafičkim prikazom koji potiču upotrebu raznovrsnih strategija i dubljeg razumijevanja.
2. Tijekom matematičkog obrazovanja, računanje i razumijevanje koncepta nagiba u linearnim grafovima može se osnažiti korištenjem metode “Koračaj pa skoči” (eng. rise over run, njem. Steigungsdreieck). Učestalost korištenja formule $v = s/t$, pri čemu se brzina tumači vrlo jednostavno kao "udaljenost kroz vrijeme" (što odgovara opisu samo najjednostavnijeg kinematičkog modela), može biti zapreka daljnjem razumijevanju fizikalnog pojma brzine te pojma brzine promjene veličine.
3. Ukupna promjena količine zaslužuje veću (vertikalnu) povezanost u nastavnom planu matematike, s naglaskom na njenim aspektima kao površina ispod grafa i akumulacija ili "dodavanje komadića", a kasnije i kao antideriviranje. Tumačenje koncepta samo kao površina ispod grafa kao gotove strategije potiče poteškoće koje ostaju prisutne i nakon uvođenja koncepta određenog integrala.

Na koji način provesti ove preporuke u nastavi? Objasnimo svaku točku preporuke zasebno i navedimo primjere u nastavi koji nam mogu približiti zadane ciljeve u nastavi.

## 3.1 Korištenje primjera iz svakodnevnog života

Ono što je važno za učenike jest da nauče prepoznati graf linearne funkcije, a zatim i znati iščitavati sve što se može iz danog grafičkog prikaza. Također, prijelaz između različitih prikaza linearne funkcije i njihovo povezivanje (tablični zapis, zapis riječima, zapis pravilom pridruživanja i grafički prikaz) predstavlja jedan od glavnih ciljeva potrebnog učenikovog znanja.

Mnogi autori (vidi [13]) bavili su se pitanjima na koja grafički prikaz može dati odgovore i prema tome podijelili razumijevanje grafova na elementarnu, srednju i naprednu razinu te dali taksonomiju realizacije tih razina.
Prema taksonomiji Wainera (1992), razumijevanje grafova realizira se u tri razine:

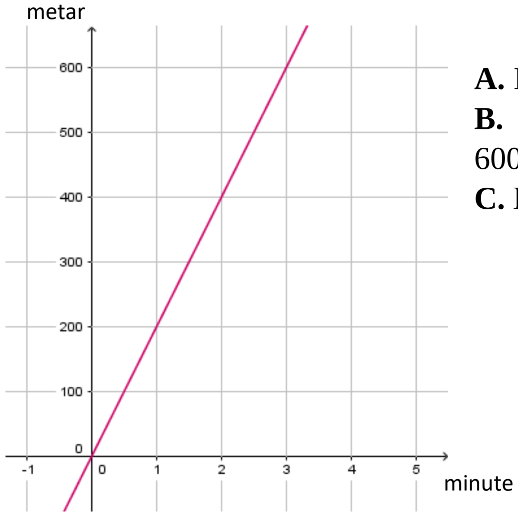
1. Direktno čitanje podataka iz grafa
2. Prepoznavanje trenda među podacima u grafu
3. Razumijevanje dublje strukture podataka zadanih grafom

Nama su najčešće potrebne prve dvije razine. Posebno se to može imati na umu pri sastavljanju zadataka. Što je ono osnovno što bi učenici trebali moći prepoznati u grafičkom prikazu (po dijelovima) linearne funkcije, odnosno na linijskom grafu, navest ćemo uz dodatne primjere zadataka specifične za to područje.

Kada je u pitanju pravokutni koordinatni sustav s varijablama $x$ i $y$, većina učenika savlada čitanje argumenata, odnosno vrijednosti zadanog grafičkog prikaza, no već postavljanjem sličnog problema u kontekst „stvarnog života“, javljaju se poteškoće i zabune u razumijevanju. Zato je važno učenicima dati na razmatranje dovoljno primjera iz „stvarnog života“ kao i iz kinematike te ih različitim pitanjima poticati na razumijevanje grafičkog prikaza.

Prvo na što učenici trebaju obratiti pozornost pri grafičkom prikazu linijskog grafa je što on zapravo prikazuje. Važno je naglasiti da je uvijek prikazana **ovisnost** dviju veličina i to na način da promjena vrijednosti veličine prikazane na $y$-osi linearno ovisi o promjeni vrijednosti veličine prikazane na $x$-osi. Dakle, linearne veličine nisu nužno proporcionalne, ali njihove odgovarajuće promjene jesu. Čitanjem vrijednosti iz grafa, odmah dobivamo povratnu informaciju učenika znaju li iščitavati osnovne podatke iz grafa pa su to najčešće prva pitanja u zadatcima s grafičkim prikazom (npr. Zadatak 3.1.1 A., B, 3.1.3.A., B., 3.1.5.A).

**Zadatak 3.1.1.** Ana je odlučila brzo hodati svakog dana kako bi ostala u formi. Tijek njenog hodanja dan je u sljedećem grafičkom prikazu:



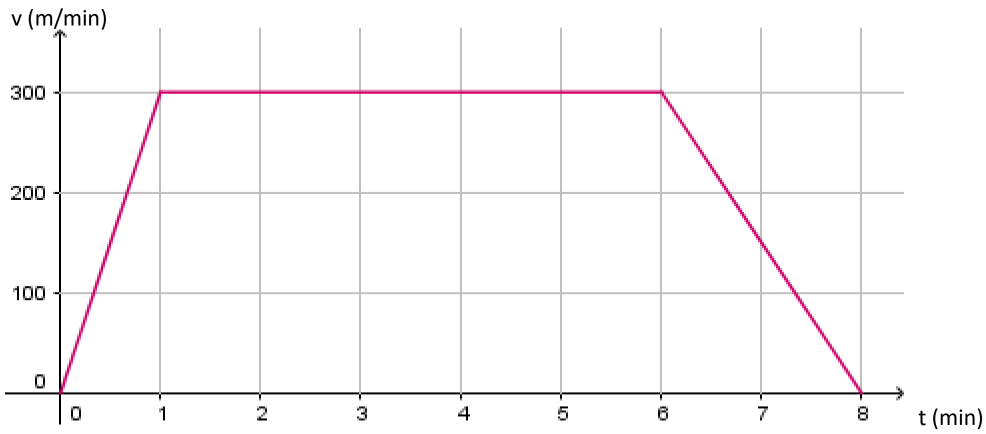

**A.** Koliko metara Ana prohoda u 3 minute?
**B.** Koliko vremena je potrebno Ani da prohoda 600 metara?
**C.** Povećava li Ana brzinu dok hoda?

Nakon iščitavanja osnovnih podataka, otkriva se monotonost linearne funkcije, odnosno rastuće i padajuće linearne funkcije. Izgled linijskog grafa je (po dijelovima) ili kosi ili horizontalni pravac. Pravac je horizontalan ako se promjenom vrijednosti veličine na $x$-osi, vrijednost veličine na $y$-osi ne mijenja, tj. konstantna je. Ako je pravac kosi, tada on može biti „rastući" ili „padajući", ovisno o tome je li linearna funkcija rastuća ili padajuća. Funkcija je rastuća ako se povećanjem vrijednosti veličine na $x$-osi vrijednost veličine na $y$-osi povećava, a ako se povećanjem vrijednosti veličine na $x$-osi vrijednost veličine na $y$-osi smanjuje, funkcija je padajuća.

Izgled grafa možemo povezati s nagibom pravca, odnosno vodećim koeficijentom linearne funkcije. Ako je vodeći koeficijent pozitivan, onda je linearna funkcija rastuća, a ako je vodeći koeficijent negativan, onda je linearna funkcija padajuća. Povezivanje grafičkog prikaza s vodećim koeficijentom preporuča se uz „Koračaj pa skoči" metodu. Detaljnije povezivanje nagiba pravca, tj. vodećeg koeficijenta u linearnoj funkciji ćemo detaljnije opisati u sljedećoj točki. Važno je da učenici ispravno tumače izgled grafa sa zadanim podatcima te ga povezuju sa nagibom pravca, odnosno vodećim koeficijentom linearne funkcije.

Primjer zadatka prikladnog za osnovno tumačenje toka linijskog grafa je Zadatak 3.1.2.A., B. Zadatak je i u kontekstu fizike (kinematike) što dodatno povezuje matematički i fizikalni kontekst.

**Zadatak 3.1.2.** U $v - t$ grafu prikazano je putovanje biciklom od kuće do škole.




**A.** U kojem vremenskom intervalu bicikl vozi stalnom brzinom? ________

**B.** Brzina na intervalu 6-8 min

i. je konstantna i pozitivna
ii. je konstantna i negativna
iii. konstantno pada
iv. konstantno raste

**C.** Na intervalu 0-1 min bicikl se kreće

i. stalnom akceleracijom koja je pozitivna
ii. stalnom akceleracijom koja je negativna
iii. konstantno rastućom akceleracijom
iv. konstantno padajućom akceleracijom

**Zadatak 3.1.3.** Graf prikazuje količinu goriva u litrama u spremniku nekog automobila koji je od 6:00 do 19:00 sati mirovao, vozio se ili bio na crpki.

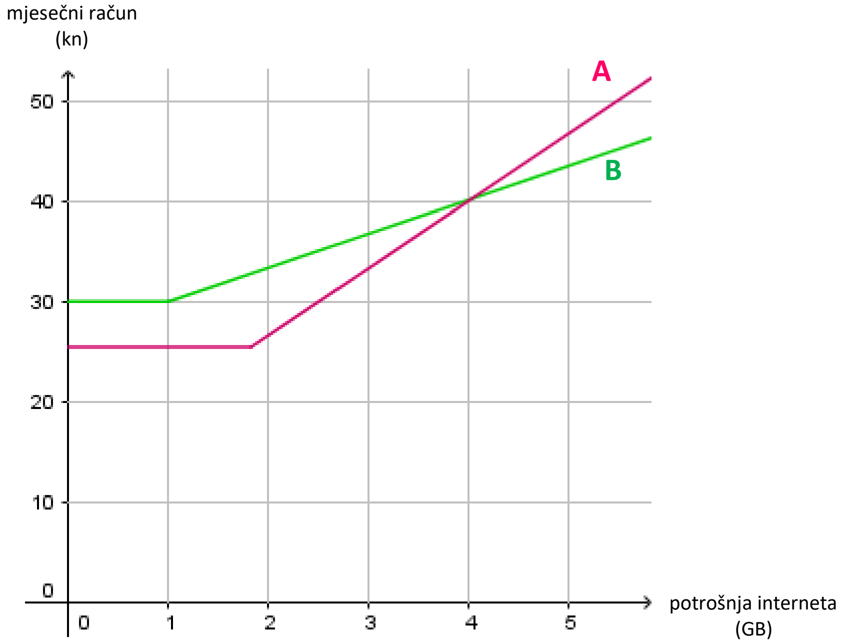

**A.** Koliko je bilo litara goriva u spremniku toga automobila u 17:00 sati?
**B.** Koliko je puta u automobil točeno gorivo od 6:00 do 19:00 sati?

**C.** Koliko je goriva potrošeno od 6:00 do 19:00 sati?

**Napomena 3.1.4.** Punjenje benzinom može se nacrtati i (vrlo) kosom crtom, ne nužno vertikalnom jer ipak prođe nešto vremena pri punjenju. Međutim, time postaje teže računanje vremena provedenog u nekoj aktivnosti.

Često se možemo susresti s prikazom više linijskih grafova na jednom prikazu pa uz takve zadatke učenici mogu uspoređivati različite prikaze (Zadatak 3.1.5.).

**Zadatak 3.1.5.** Linijski grafovi A i B prikazuju ovisnost iznosa mjesečnog računa o potrošnji interneta za mobilne usluge operatera A i operatera B.




**A.** Marko mjesečno potroši 1.5 GB interneta. Koji operater mu je isplativiji za odabrati? Zašto?
**B.** Koliko maksimalno GB bi Marko mogao potrošiti za 40kn i kod kojeg operatera?
**C.** U intervalu 2 – 4 GB:

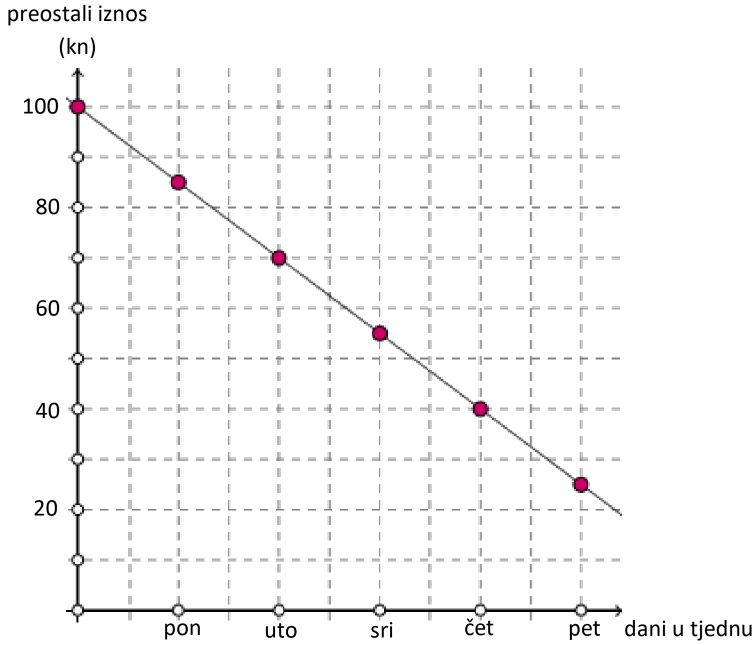
**i.** brzina potrošnje novaca u odnosu na potrošnju interneta jednaka je kod oba operatera

**ii.** brzina potrošnje novaca u odnosu na potrošnju interneta veća je kod operatera A

**iii.** brzina potrošnje novaca u odnosu na potrošnju interneta veća je kod operatera B

Osim linijskog grafa, linearna ovisnost može se prikazati i točkastim grafom koji spajanjem točaka postaje pravac. Kako se u sedmom razredu osnovne škole još ne uči koncept skupa realnih brojeva, ovakav grafički prikaz bi bio i ispravniji za neke linearne ovisnosti koje se spominju u zadatcima, ali radi jednostavnosti, koristi se samo pravac. Međutim, u osmom razredu ili u srednjoj školi, učenici bi već mogli interpretirati i grafički prikaz sličan prikazu u Zadatku 3.1.6.

**Zadatak 3.1.6.** Ivan je na početku tjedna dobio džeparac koji koristi za kupnju dnevnih obroka. Graf prikazuje odnos preostalog džeparca u danu tijekom jednog tjedna.




**A.** Koliko je iznosio početni džeparac?
**B.** Koliko novaca Ivan ima u četvrtak?
**C.** Koji dan je Ivan potrošio najviše novaca na hranu?
**D.** Nastavi li ovim „tempom“ potrošnje novaca, hoće li imati dovoljno i za ručak u nedjelju, ako je cijena ručka kao i ukupna cijena svih obroka u četvrtak?
**E.** Je li prikazana ovisnost linearna? Zašto?

Ovim primjerima prikazani su neki osnovni zadatci vezani uz razumijevanje grafičkog prikaza linearne funkcije u različitim kontekstima. U sljedećim točkama prikazat ćemo razumijevanje koncepta nagiba pravca i površine ispod grafa funkcije koji ustvari predstavljaju brzinu promjene jedne veličine u odnosu na drugu te ukupnu promjenu neke veličine u određenom periodu.

## 3.2 Razumijevanje koncepta nagiba pravca

Nagib pravca govori o brzini rasta funkcije. Kod pravca $y = ax + b$ poznata je ovisnost rasta (pada) o predznaku koeficijenta $a$:

za $a < 0$, funkcija je padajuća,
za $a = 0$, funkcija je konstantna,
za a $>$ 0, funkcija je rastuća.

Pad i rast to su brži što je veća apsolutna vrijednost koeficijenta $a$.
Pri konstruiranju različitih grafova linearne funkcije, učenici su uočili da su dovoljne već dvije točke za konstrukciju grafa.

Za što jednostavniju konstrukciju, učenike učimo konstrukciji pravca metodom „Koračaj pa skoči“. Kako bi koristili tu metodu, potrebna im je geometrijska interpretacija koeficijenata linearne funkcije. Za linearnu funkciju $f$ s pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$, apsolutnu vrijednost slobodnog koeficijenta $b$ geometrijski interpretiramo kao udaljenost ishodišta do točke u kojoj graf funkcije $f$ siječe $y$-os. Točka u kojoj graf linearne funkcije siječe $y$-os je točka $(0, b)$. Apsolutna vrijednost vodećeg koeficijenta $a$ označava za koliko se promijeni (poveća/smanji) vrijednost funkcije $f$ ako $x$ povećamo za 1. Crtanje započinjemo pronalaženjem točke $(0, b)$ u koordinatnom sustavu iz koje se ovisno o vrijednosti koeficijenta $a$ pomičemo udesno i gore/dolje te dobivamo drugu točku pravca. Na taj način dobivamo pravokutan trokut čiji je omjer duljina kateta (katete paralelne s $y$-osi i katete paralelne s $x$-osi) jednak apsolutnoj vrijednosti vodećeg koeficijenta funkcije. Pravac koji prolazi kroz te dvije točke, traženi je graf funkcije.

Ovisno o vrijednosti vodećeg koeficijenta $a$, pri crtanju razlikujemo 4 slučaja:
Zadana je linearna funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$. U koordinatnom sustavu označimo točku $A(0, b)$ koja pripada traženom grafu.

***1. slučaj*** - $a$ je pozitivan cijeli broj
Broj $a$ zapišimo u obliku $a = \frac{a}{1}$.
Tada je duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka nazivniku u prikazu broja $a$ kao razlomka, a duljina vertikalne katete brojniku tog razlomka. Prema tome, drugu točku grafa dobivamo tako da se od točke $A$ pomaknemo za 1 jediničnu dužinu udesno i za $a$ jediničnih dužina prema gore.

***2. slučaj*** - $a$ je negativan cijeli broj
Kao i u 1.slučaju, broj a zapišimo u obliku $a = \frac{a}{1}$.

Tada je duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka broju 1, a duljina vertikalne katete $|a|$. Prema tome, drugu točku grafa dobivamo tako da se od točke $A$ pomaknemo za 1 jediničnu dužinu udesno i za $|a|$ jediničnih dužina prema dolje. Dakle, uočimo da se 1. i 2. slučaj razlikuju samo u predznaku broja $a$ koji u crtanju razlikuje crtanje prema gore (ako je $a$ pozitivan), odnosno prema dolje (ako je $a$ negativan).

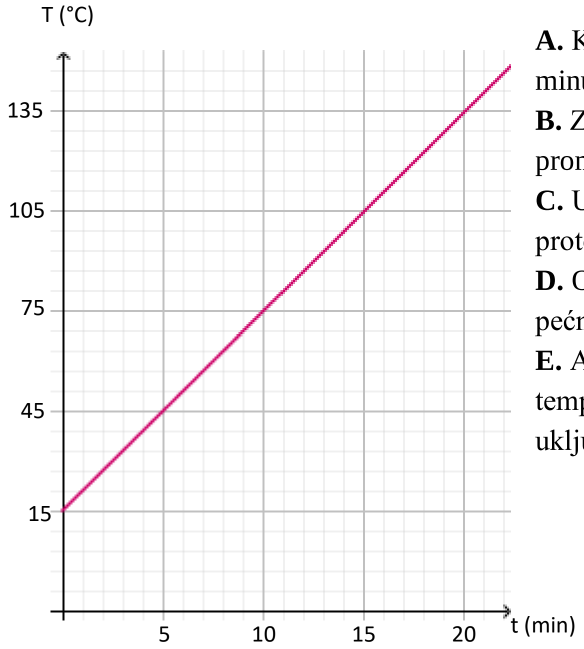
***3. slučaj*** - $a$ je pozitivan racionalan broj
Broj $a$ zapišimo u obliku $a = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.
Tada je duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka nazivniku u prikazu broja $a$ kao razlomka, a duljina vertikalne katete brojniku tog razlomka. Prema tome, drugu točku grafa dobivamo tako da se od točke $A$ pomaknemo za $n$ jediničnih dužina udesno i za $m$ jediničnih dužina prema gore.

***4. slučaj*** - $a$ je negativan racionalan broj
Broj $a$ zapišimo u obliku $a = -\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$.
Tada je duljina horizontalne katete pravokutnog trokuta koji crtamo jednaka nazivniku u prikazu broja $a$ kao razlomka, a duljina vertikalne katete brojniku tog razlomka. Prema tome, drugu točku grafa dobivamo tako da se od točke $A$ pomaknemo za $n$ jediničnih dužina udesno i za $m$ jediničnih dužina prema dolje. Uočimo, 3.i 4. slučaj razlikuju se u predznaku broja $a$ koji razlikuje crtanje grafa u postupku prema gore (ako je $a$ pozitivan), odnosno prema dolje (ako je $a$ negativan).

Sada, kada učenici razumiju metodu „Koračaj pa skoči", učenici mogu iz grafičkog prikaza linearne funkcije odrediti vodeći koeficijent i slobodni koeficijent prikazane funkcije. Vodeći koeficijent dobiva se kao omjer kateta pripadnog pravokutnog trokuta, a slobodni koeficijent određivanjem točke u kojoj pravac siječe os $y$.

Nakon povezivanja grafičkog prikaza linearne funkcije sa njezinim vodećim koeficijentom, važna je interpretacija značenja tog broja. Dosada su učenici naučili da vodeći koeficijent linearne funkcije označava omjer, brzinu promjene tj. ako se u funkciji zadanoj pravilom pridruživanja $\mathrm{f}(x) = ax + b$ argument x poveća za 1, vrijednost $f(x)$ se poveća za $|a|$ ako je $a$ pozitivan, odnosno smanji za $|a|$ ako je $a$ negativan. Provedenim aktivnostima na satu, učenici povezuju omjer kateta pripadnog pravokutnog trokuta sa omjerom promjena veličina pripadne funkcije što je ustvari jednako apsolutnoj vrijednosti vodećeg koeficijenta funkcije, odnosno nagiba pravca u grafičkom prikazu. Jedna od takvih aktivnosti navedena je u zadnjem poglavlju ovog rada. Neki prikladan zadatak u kojem učenici određuju nagib pravca te ga povezuju s brzinom promjene u kontekstu „stvarnog života“ bio bi sličan Zadatku 3.2.1.

**Zadatak 3.2.1.** Prikazana je ovisnost temperature pećnice o vremenu od njezinog uključenja.




**A.** Kolika je temperatura pećnice nakon 20 minuta?
**B.** Za koliko se stupnjeva temperatura u pećnici promijeni u minuti?
**C.** U kakvom su odnosu temperatura pećnice i proteklo vrijeme od njezinog uključenja?
**D.** Odredi funkciju koja opisuje kako temperatura pećnice ovisi o proteklom vremenu od uključenja.
**E.** Ako kolač treba staviti u pećnicu kada joj je temperatura 210 °C, nakon koliko minuta od uključenja pećnice treba u nju staviti kolač?

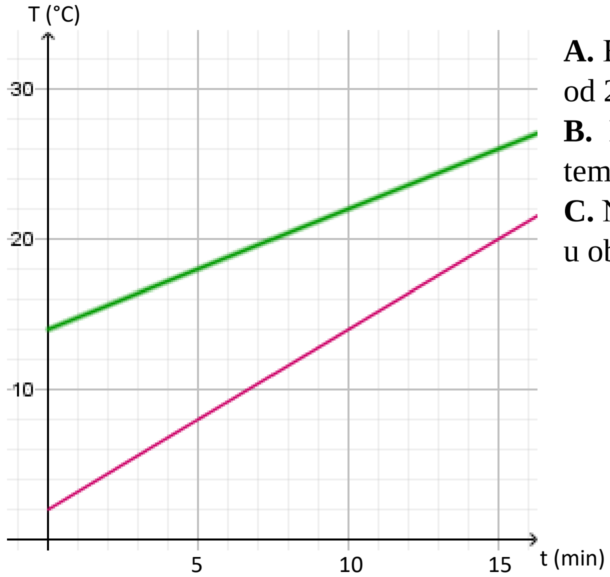
Omjer promjena veličina ustvari predstavlja brzinu neke promjene, što bi učenici trebali otkriti kroz nekoliko primjera usporedbi grafičkog prikaza linearne funkcije u kontekstu svakodnevnog života – određivanjem nagiba pravca (vodećeg koeficijenta funkcije) „Koračaj pa skoči“ metodom i njegovom interpretacijom. Također, promatranjem kako on utječe na „strmost“ pravca, učenici dolaze do zaključka da što je pravac „strmiji“, to je veći nagib pravca pa je i brzina promjene veća.

**Napomena 3.2.1.** *Strmost pravca uočava se i interpretira i u početnim primjerima, ali sada se povezuje s nagibom pravca.*

Jedan od primjera zadataka s uspoređivanjem grafova i povezivanjem s nagibom pravca dan je kao Zadatak 3.2.2.

**Zadatak 3.2.2.** Posudu s 3 dL vode zagrijavamo tako da se temperatura vode svakih 5 minuta poveća za 6 °C. Posudu s 2 dL vode zagrijavamo tako da se temperatura vode svakih 5 minuta poveća za 4 °C.

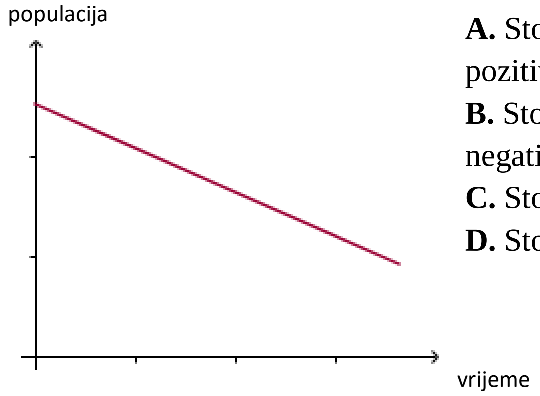
Grafovi ovisnosti temperature vode o vremenu prikazani su na slici.




**A.** Koja je početna temperatura vode u posudi od 2 dL?
**B.** Koliko se svake minute smanjuje razlika temperatura voda u tim posudama?
**C.** Nakon koliko će minuta temperature vode u objema posudama biti jednake?

Nagib pravca često se interpretira u kontekstu fizike i to najčešće u jednostavnim kinematičkim modelima - jednoliko i jednoliko ubrzano gibanje po pravcu. Tada su brzina, odnosno akceleracija gibanja konstantne te su odgovarajuće veze linearne. Primjerice, u $s - t$ grafu koji prikazuje jednoliko gibanje po pravcu, nagib pravca $s = s(t)$ predstavlja brzinu objekta, dok u $v - t$ grafu koji predstavlja jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje po pravcu $v = v(t)$ akceleraciju objekta. Važno je učenike kroz kratke, ali svestrane primjere grafičkih prikaza (po dijelovima) linearnih funkcija poticati na razmišljanje i interpretaciju nagiba pravca kako bi razumijevanje takvih prikaza u budućnosti bilo puno bolje savladano nego što pokazuju dosadašnja istraživanja. Neki od takvih zadataka su i sljedeći zadatci koji su slični onima na kojima su se provodila promatrana istraživanja o razumijevanju grafičkog prikaza linearne funkcije.

**Zadatak 3.2.3.** Graf prikazuje kako se populacija neke zemlje mijenjala kroz određeno vrijeme. Koja rečenica je točna?

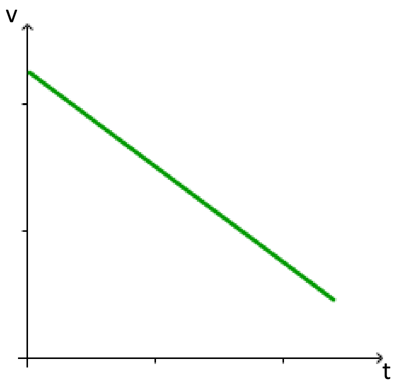



**A.** Stopa promjene populacije je konstantna i pozitivna
**B.** Stopa promjene populacije je konstantna i negativna
**C.** Stopa promjene populacije konstantno raste
**D.** Stopa promjene populacije konstantno pada

**Zadatak 3.2.4.** Gibanje nekog objekta prikazano je u $s-t$ grafu.
Zaokruži točnu izjavu:


**A.** Objekt se ne kreće
**B.** Objekt se kreće konstantnom brzinom
**C.** Objekt se kreće jednoliko usporeno
**D.** Objekt se kreće jednoliko ubrzano
Objasni.

**Zadatak 3.2.5.** Gibanje nekog objekta prikazano je u $v-t$ grafu. Zaokruži točnu izjavu:

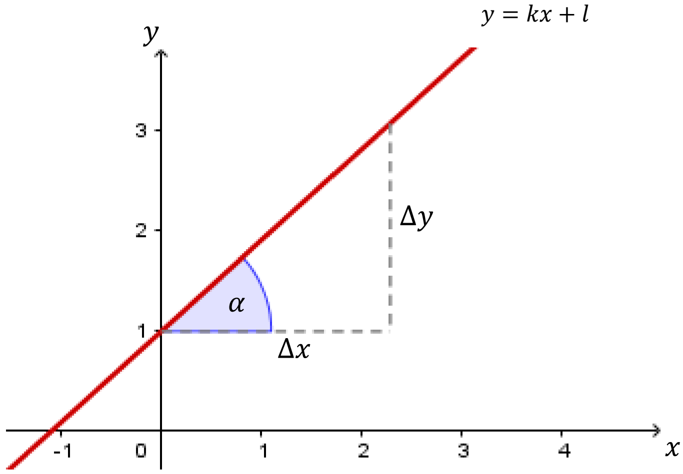



**A.** Objekt se kreće s konstantnom akceleracijom različitom od 0
**B.** Objekt se kreće s akceleracijom jednakom nuli
**C.** Objekt se kreće s konstantnim povećanjem akceleracije
**D.** Objekt se kreće s konstantnim smanjenjem akceleracije
Objasni.

**Napomena 3.2.2.** *Također, nagib pravca $y = kx + l$ može se izraziti i kao*

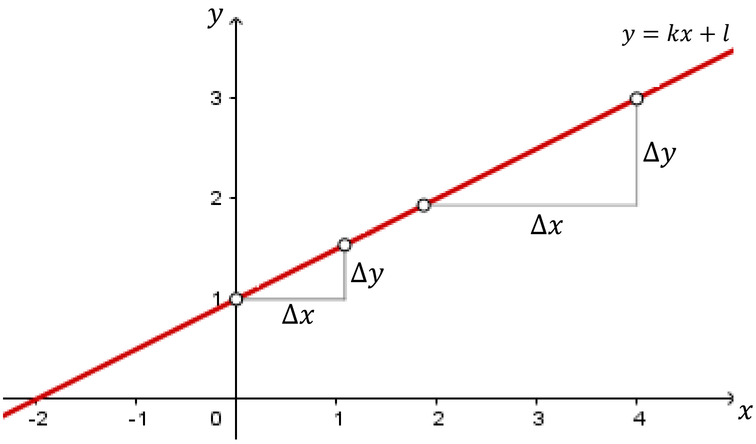
$$k = tg\alpha,$$

*pri čemu je α kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom* $x$*-osi (Slika 3.1).*




Slika 3.1: Kut $\alpha$ koji pravac $y = kx + l$ zatvara s pozitivnim dijelom $x$-osi

Koeficijent smjera pravca $y = ax + b$ poistovjećuje se s omjerom prirasta $\Delta y/\Delta x$ koji je stalan i određuje nagib pravca. Graf linearne funkcije u svakoj točki ima jednak nagib pa kažemo da linearna funkcija raste (pada) jednako brzo u svakoj točki (Slika 3.2).




Slika 3.2: Nagib pravca jednak je omjeru $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

U četvrtom razredu srednje škole, nagib grafa proizvoljne (nelinearne) funkcije $f$ u nekoj točki $(x, y)$ definira se kao nagib tangente položene na graf u toj točki. Kako funkcije različite od linearne nemaju jednak nagib u svakoj točki, njihov rast (pad) nije jednak u svakoj točki. Jedan od načina određivanja nagiba tangente u zadanoj točki grafa funkcije jest zamjena tangente sekantom koja prolazi kroz 2 točke na grafu funkcije i to točkama $(x, y)$ i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Što je vrijednost prirasta $\Delta x$ manja, to će sekanta biti bolja aproksimacija za tangentu u točki $(x, y)$. Puštajući da $\Delta x$ teži nuli, iz jednadžbe sekante dobivamo jednadžbu tangente. Nagib sekante je $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pa je nagib tangente jednak

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

što je ustvari, prema definiciji derivacije, derivacija funkcije $f$ u točki $(x, y)$.

**Definicija 3.2.3.** ***Derivacija funkcije f u točki*** $\boldsymbol{x_0}$ *je broj:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

*ukoliko ovaj limes postoji. Taj je broj jednak nagibu k tangente na graf* $y = f(x)$ *u točki* $(x_0, y_0)$. *Derivaciju još označavamo simbolima*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

**Napomena 3.2.4.** *Također, za zadane veličine* $s$ *i* $t$, *brzina promjene veličine* $s$ *u odnosu na* $t$ *definira se kao derivacija funkcije* $s = s(t)$, *tj.*

$$v(t) := \frac{ds}{dt}.$$

*Brzina promjene veličine s u odnosu na t u točki* $t_0$ *je derivacija u* $t_0$*:*

$$\frac{ds}{dt}(t_0) = v(t_0).$$

## 3.3 Ukupna promjena količine (površina ispod grafa funkcije)

Ukupna promjena količine, odnosno površina ispod grafa tijekom nastavnog plana nije previše zastupljena. Najviše se spominje u četvrtom razredu srednje škole i to kao računanje određenog integrala.

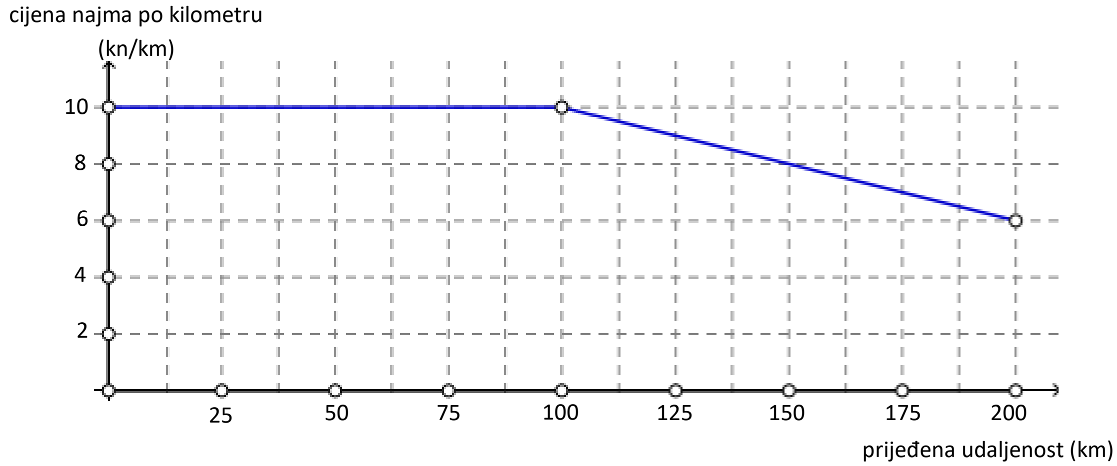
**Napomena 3.3.1.** *Primitivna funkcija služi za računanje određenog integrala.*

Ovaj koncept trebao bi se kroz primjere više uvesti u nastavu i to već uz nastavne cjeline linearne funkcije, ali ne samo kao računanje površine ispod grafa već povezati taj aspekt sa idejom akumulacije veličine. U pozadini te ideje je ideja „skupljanja komadića“, odnosno intuitivna ideja određenog integrala. Samu ideju moguće je realizirati kroz primjere iz „stvarnog života“ kojima se približava učenikovu razumijevanju u cilju smanjenja poteškoća koje ostaju prisutne nakon uvođenja koncepta određenog integrala.

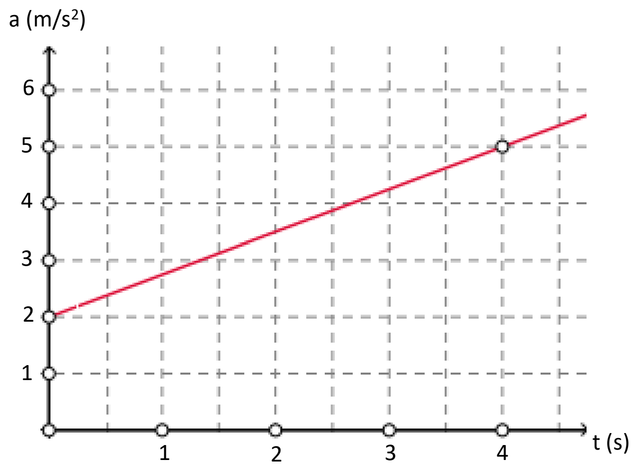
Ako se neka veličina mijenja, onda se ona i akumulira, odnosno skuplja (ili smanjuje) nekim intenzitetom. Ono što je važno kod ideje akumulacije jest to da je potrebno prepoznati što se to akumulira i kojom brzinom se akumulira. Neki od poznatih primjera su: nakupljanje vode ako kiša pada određenim intenzitetom, količina novaca ako cijena dionica raste u određenom razdoblju, prijeđeni put pri vožnji automobila određenom brzinom, ukupna visina biljke u određenom periodu, ukupna promjena brzine pri gibanju s određenom akceleracijom, rad koji nastaje promjenom sile na putu itd. Međutim, nisu uvijek veličine koje se akumuliraju intuitivno jasne zbog svoje apstraktnosti, ali kako je ideja akumulacije intuitivno jasna, potrebno je iskoristiti je za razumijevanje pojma ukupne promjene i uspostavljanje veze između brzine promjene i ukupne promjene.

S učenicima je važno proći ideju akumulacije i povezati je s površinom ispod grafa funkcije. Jedna od mogućih aktivnosti za uvođenje tih pojmova i povezivanje koncepata nalazi se u zadnjem poglavlju ovog rada. Nakon povezivanja ovih koncepata, kroz različite intuitivno jasne, ali i apstraktne primjere i zadatke, učenicima bi se trebalo olakšati razumijevanje ovog područja i povezivanje s grafičkim prikazom. Neki od takvih primjera dani su u sljedećim zadatcima gdje se traži ukupna promjena zadanih veličina koju je potrebno odrediti iz zadanih linijskih grafova. Slični zadatci bili su na provedenom istraživanju o razumijevanju grafičkog prikaza linearne funkcije.

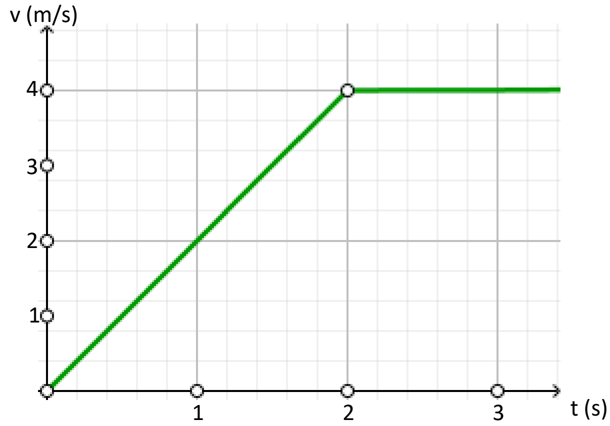
**Zadatak 3.3.1.** Dan je grafički prikaz ovisnosti cijene iznajmljivanja auta po kilometru o prijeđenoj udaljenosti auta. Početni iznos najma iznosi 1000kn. Koliki je ukupni iznos najma automobila za 200km putovanja?



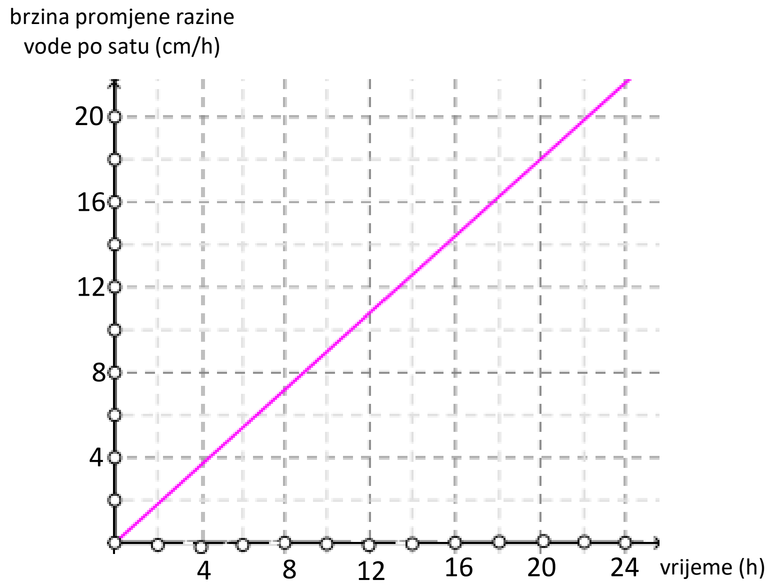

**Zadatak 3.3.2.** Kretanje vlaka prikazano je u $a - t$ grafu. Kolika je ukupna promjena brzine vlaka između $t = 0$ i $t = 4$ sekundi?




**Zadatak 3.3.3.** Dizalo putuje iz podruma do vrha zgrade. Njegovo putovanje prikazano je u $v - t$ grafu. Koju udaljenost je dizalo proputovalo u prve 3 sekunde?




**Zadatak 3.3.4.** Graf prikazuje brzinu promjene razine vode određene rijeke tokom jednog dana. Kolika je ukupna promjena razine vode te rijeke u prvih 20 sati?



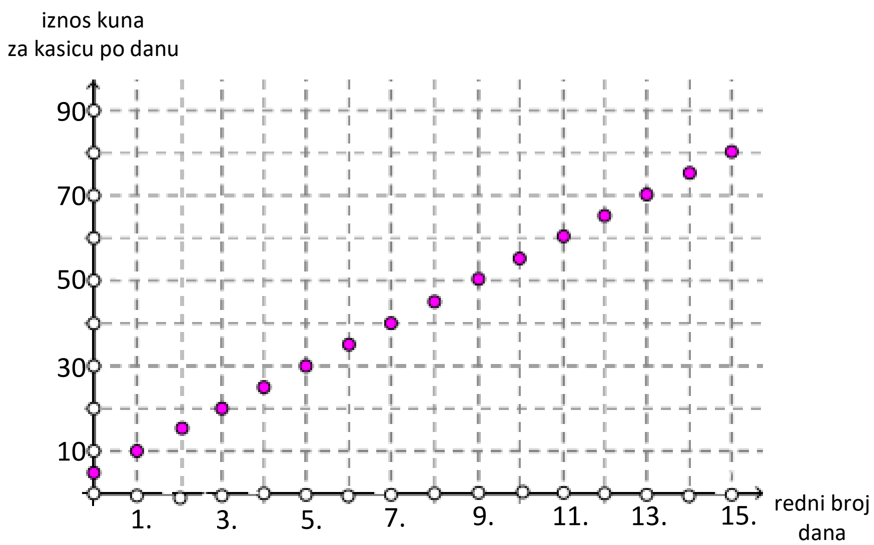

Najvažnije pitanje u određivanju ukupne promjene je: Kolika je **ukupna** promjena određene veličine? Prebrojavanjem i uočavanjem dijelova koji se nakupljaju u grafu, učenici postupno razvijaju bolje razumijevanje u rješavanju ovakvih problema iz „stvarnog života“. Ideja akumulacija, odnosno „skupljanja komadića“, pojavljuje se i u situacijama s aritmetičkim nizovima, odnosno, funkcijama definiranim na skupu prirodnih brojeva. Tada je ukupna količina jednaka sumi odgovarajućih vrijednosti.

**Zadatak 3.3.5.** Marija želi kupiti novi mobitel. Potrebno joj je još 700 kuna i zaključila je da će skupljanjem novca na način prikazan na slici prikupiti dovoljno u 15 dana. Započela je s 5 kuna i svakog dana povećavala količinu novca koju je stavljala u „kasicu prasicu".

**A.** Koliko kuna je stavila u „kasicu prasicu" 5.dana?

**B.** Za koliko kuna je svakog dana povećavala unos novca u „kasicu prasicu"?

**C.** Je li uspjela prikupiti dovoljno novaca za kupnju mobitela? Koliko je točno prikupila novaca?




Ovakva grafička interpretacija ukupne promjene temelji se na Osnovnom teoremu infinitezimalnog računa koji povezuje pojam određenog integrala s primitivnom funkcijom, odnosno neodređenim integralom zadane funkcije. Također, možemo ga izreći i putem Newton-Leibnizove formule:

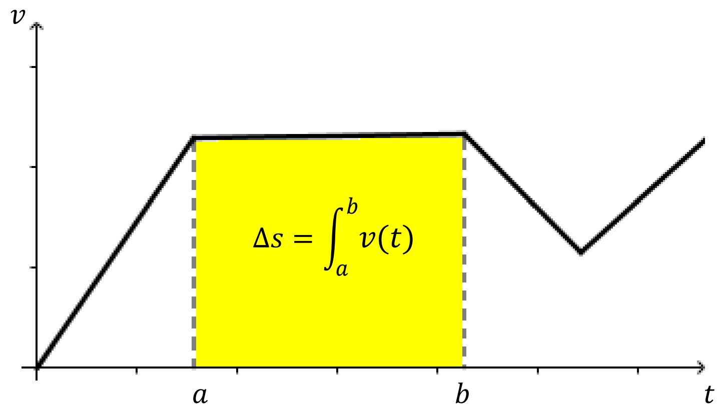
$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a),$$

gdje je $F$ diferencijabilna funkcija na $[a, b]$, a njezina derivacija $F'$ je integrabilna na $[a, b]$. Funkciju $F$ nazivamo primitivnom funkcijom ili antiderivacijom funkcije $f := F'$. Određeni integral ograničene funkcije na segmentu definiran je pomoću Riemannovih suma te se geometrijski interpretira kao „površina ispod grafa". Jedino valja biti oprezan pri negativnim funkcijskim vrijednostima jer je tada „visina" opisanog, odnosno upisanog pravokutnika negativna pa je i tražena površina između grafa i $x$-osi negativna.

**Napomena 3.3.2.** *U kinematici, pojam ukupne promjene veličine* $s$ *od* $t = a$ *do* $t = b$ *definira se kao*

$$\Delta s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t).$$

*Grafički, u* $v - t$ *grafu ukupna promjena veličine* $s$ *od* $t = a$ *do* $t = b$ *jednaka je površini ispod grafa funkcije* $v = v(t)$ *(Slika 3.3).*




Slika 3.3: Prikaz ukupne promjene puta od $t = a$ do $t = b$ u $v - t$ grafu

**Napomena 3.3.3.** *Koncept ukupne promjene, u grafičkom se prikazu može razumjeti u nekoliko faza:*

1. *Diskretne funkcijske ovisnosti (nizovi i računanje zbroja/sume)*
2. *Konstantne funkcije*
3. *Linearne funkcije oblika* $f(x) = ax, a \neq 0$
4. *Opće, po dijelovima linearne funkcije, tj. razlomljeni pravci*

# Poglavlje 4

# Aktivnosti u nastavi matematike

AKTIVNOST 1**. „Opiši me“**

**Cilj aktivnosti:** učenici će, rješavajući individualno kontekstualni zadatak te uz zajedničku diskusiju otkriti što predstavlja nagib pravca u kontekstualnom problemu

**Oblik rada:** individualni rad, diskusija

**Nastavne metode:** heuristička nastava, metoda dijaloga

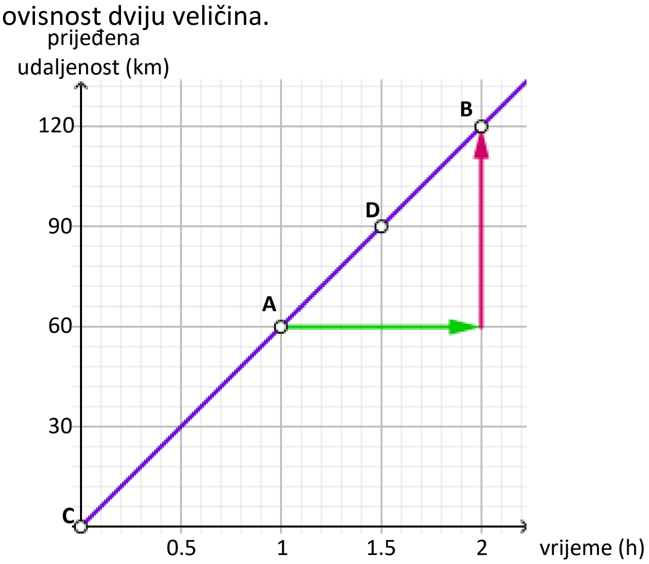
**Potrebni materijal:** nastavni listić za svakog učenika

**Tijek aktivnosti:** Učenici su podijeljeni u parove. Jedan učenik iz para dobiva Nastavni listić A, a drugi Nastavni listić B. Nakon rješavanja, usmeno se provjeravaju rješenja uz prikaz u PPT prezentaciji. Nakon provjere, učenik koji je rješavao Nastavni listić A dobiva Nastavni listić C, a drugi učenik iz para Nastavni listić D. Nakon rješavanja, usmeno se provjeravaju rješenja uz prikaz u PPT prezentaciji te se na kraju pokreće diskusija.

**Diskusija:**
„U svim primjerima odredili smo omjer promjena danih veličina.“
„U prvom primjeru promatrali smo odnos kojih veličina?“ (Količine goriva i duljine puta.)
„Računavši omjer odgovarajućih promjena tih veličina dobili smo da je jednak čemu?“ (Nagibu pravca.)
Analogno ponovimo za ostala tri primjera te zajednički zaključujemo što opisuje nagib pravca:
„Što možemo reći, što opisuje nagib pravca?“ (Brzinu promjene zadanih veličina, stopu promjene, koliko se jedna veličina mijenja u odnosu na promjenu druge…)
Zaključak: Nagib pravca označava brzinu promjene jedne veličine u odnosu na drugu.

**NASTAVNI LISTIĆ A**

Graf prikazuje linearnu ovisnost dviju veličina.




**1.** Odnos kojih dviju veličina je prikazan na grafu?

**2.** Odredi nagib pravca iz grafičkog prikaza.

**3.** Zaokruži točno i dopuni rečenicu promatrajući promjene danih veličina uz pomoć strelica.
Povećanjem/smanjenjem _____________za ___ h, ______________________ se poveća/smanji za ___ km.

**4.** Kao u 3.zadatku, ucrtaj pravilno strelice i opiši promjene od točke C do točke D.

**5.** Kako se promjena vrijednosti mijenjala u odnosu na promjenu argumenata? Izrazi promjene u obliku omjera:

$$omjer = \frac{promjena\ vrijednosti}{promjena\ argumenata}$$

$$o_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\ }{\ }$$

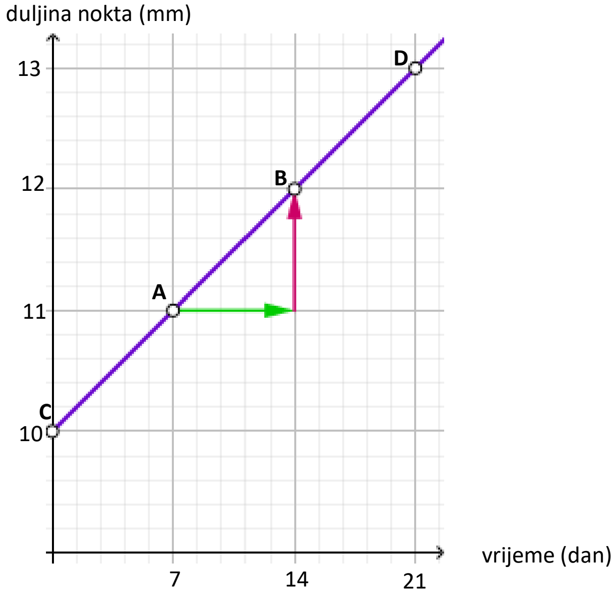
$$o_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\ }{\ }$$

Što predstavljaju dobiveni omjeri? Opiši ih.

**6.** Kakve su vrijednosti dobivenih omjera usporedivši ih s nagibom pravca?

**NASTAVNI LISTIĆ B**

Graf prikazuje linearnu ovisnost dviju veličina.




**1.** Odnos kojih dviju veličina je prikazan na grafu?

**2.** Odredi nagib pravca iz grafičkog prikaza.

**3.** Zaokruži točno i dopuni rečenicu promatrajući promjene danih veličina uz pomoć strelica.
Povećanjem/smanjenjem _____________za ___ dana, ______________________ se poveća/smanji za ___ mm.

**4.** Kao u 3.zadatku, ucrtaj pravilno strelice i opiši promjene od točke C do točke D.

**5.** Kako se promjena vrijednosti mijenjala u odnosu na promjenu argumenata? Izrazi promjene u obliku omjera:

$$omjer = \frac{promjena\ vrijednosti}{promjena\ argumenata}$$

$$o_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \underline{\qquad\qquad} = —$$

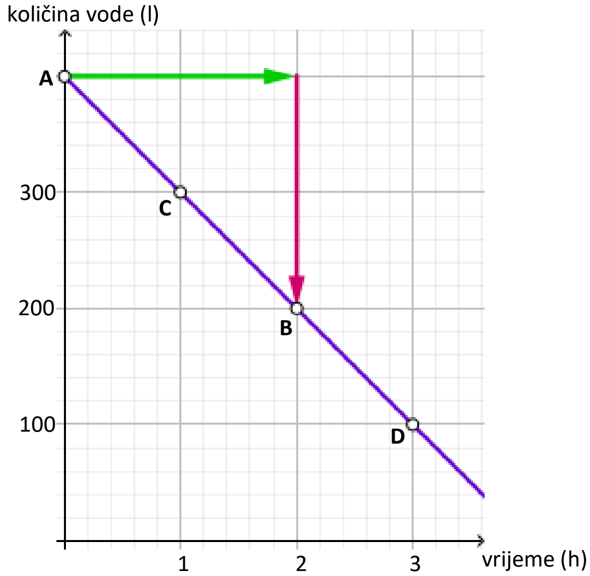
$$o_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \underline{\qquad\qquad} = —$$

Što predstavljaju dobiveni omjeri? Opiši ih.

**6.** Kakve su vrijednosti dobivenih omjera usporedivši ih s nagibom pravca?

**NASTAVNI LISTIĆ C**

Graf prikazuje linearnu ovisnost dviju veličina.




**1.** Odnos kojih dviju veličina je prikazan na grafu?

**2.** Odredi nagib pravca iz grafičkog prikaza.

**3.** Zaokruži točno i dopuni rečenicu promatrajući promjene danih veličina uz pomoć strelica.

Povećanjem/smanjenjem _____________za ___ h, ______________________ se poveća/smanji za ___ l.

**4.** Kao u 3.zadatku, ucrtaj pravilno strelice i opiši promjene od točke C do točke D.

**5.** Kako se promjena vrijednosti mijenjala u odnosu na promjenu argumenata? Izrazi promjene u obliku omjera:

$$omjer = \frac{promjena\ vrijednosti}{promjena\ argumenata}$$

$$o_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{}{}$$

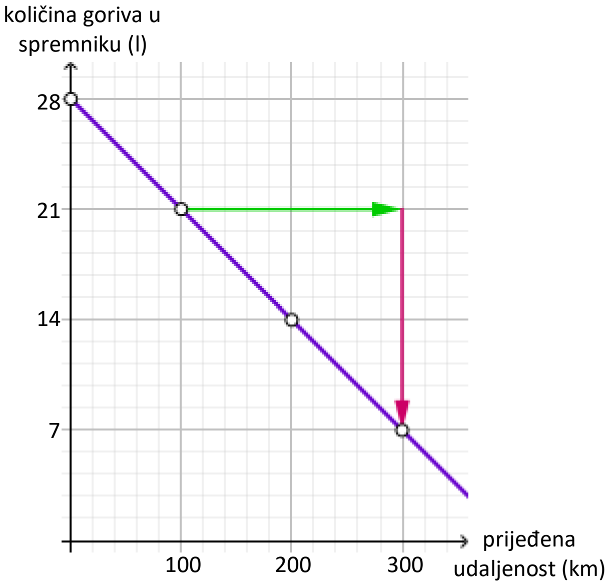
$$o_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{}{}$$

Što predstavljaju dobiveni omjeri? Opiši ih.

**6.** Kakve su vrijednosti dobivenih omjera usporedivši ih s nagibom pravca?

**NASTAVNI LISTIĆ D**

Graf prikazuje linearnu ovisnost dviju veličina.




**1.** Odnos kojih dviju veličina je prikazan na grafu?

**2.** Odredi nagib pravca iz grafičkog prikaza.

**3.** Zaokruži točno i dopuni rečenicu promatrajući promjene danih veličina uz pomoć strelica.

Povećanjem/smanjenjem _____________za ___ km, ______________________ se poveća/smanji za ___ l.

**4.** Kao u 3.zadatku, ucrtaj pravilno strelice i opiši promjene od točke C do točke D.

**5.** Kako se promjena vrijednosti mijenjala u odnosu na promjenu argumenata? Izrazi promjene u obliku omjera:

$$omjer = \frac{promjena\ vrijednosti}{promjena\ argumenata}$$

$$o_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\ }{\ }$$

$$o_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\ }{\ }$$

Što predstavljaju dobiveni omjeri? Opiši ih.

**6.** Kakve su vrijednosti dobivenih omjera usporedivši ih s nagibom pravca?

AKTIVNOST 2. **„Ukupna promjena“**

**Cilj aktivnosti:** učenici će, suradničkim radom u paru, rješavajući kontekstualni zadatak, otkriti što predstavlja površina ispod grafa u kontekstualnom problemu

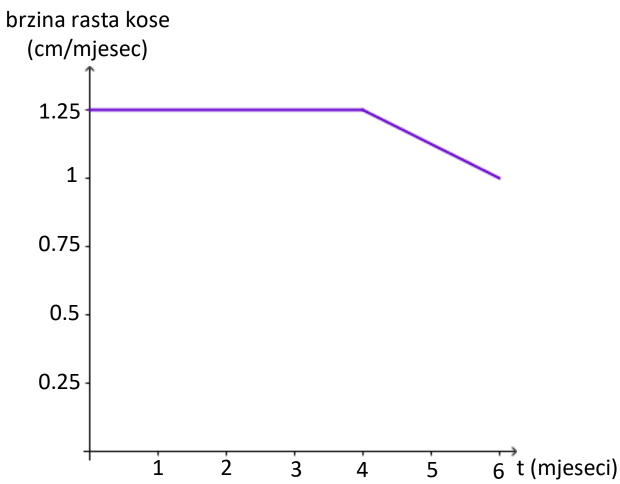
**Oblik rada:** individualni rad, diskusija

**Nastavne metode:** heuristička nastava, metoda dijaloga

**Potrebni materijal:** nastavni listić sa grafovima za svakog učenika (**PRILOG 1**)

**Tijek aktivnosti:** Učenici dobivaju uputu da riješe 1. zadatak. Svakom učeniku podijelim nastavni listić sa zadatcima. Nakon usmene provjere rješenja, zadajem učenicima da izračunaju površinu ispod grafa. Nakon rješavanja, uspoređujemo dobivene rezultate te zaključujemo da iz grafičkog prikaza linearne ovisnosti brzine promjene o vremenu možemo odrediti kolika je ukupna promjena idejom „akumulacije“. Važno je znati što se akumulira i kojom brzinom, a ukupna akumulacija jednaka je površini ispod grafa funkcije u odgovarajućem grafičkom prikazu.
Nakon zaključka, učenici rješavaju 2.zadatak primjenjujući prethodni zaključak (računajući površinu ispod grafa funkcije). Usmeno provjeravamo rješenja.

**PRILOG 1**
**Zadatak 1.** Nika je 6 mjeseci proučavala svoju kosu i izradila graf prema dobivenim mjerenjima:




**Odgovori na pitanja:**

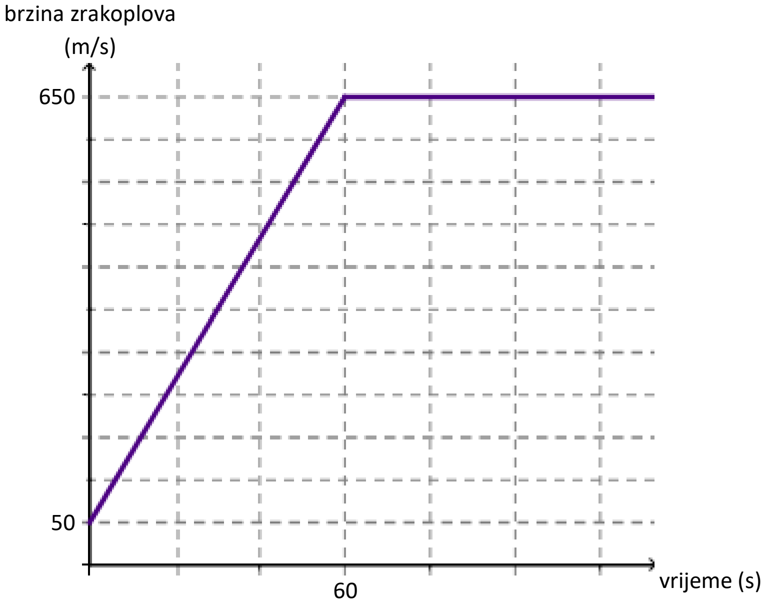
**A.** Što prikazuje graf?

**B.** Kakva je brzina rasta kose tijekom prvih 6 mjeseci?

**C.** Što se tijekom tog vremena „akumuliralo“?

**D.** Odredi koliko je kose naraslo u prvih 6 mjeseci od šišanja. Objasni postupak.

**Zadatak 2.** Graf prikazuje polijetanje zrakoplova.




**A.** Kakva je brzina zrakoplova prvih 1.5 minutu?

**B.** Što se tokom tog vremena „akumuliralo“?

**C.** Koliki je put prešao zrakoplov u prvoj minuti od polijetanja zrakoplova?

Koncept nagiba pravca i površine ispod grafa već u obradi nastavne cjeline „Linearna funkcija“ mogu se povezati sa brzinom promjene i ukupnom promjenom. Tada će učenici imati dobar temelj za lakše povezivanje derivacije kao brzine i integrala kao površine ispod grafa u 4.razredu srednje škole.

# Bibliografija

[1] A. Bogner Boroš, P. Brkić, L. Havranek Bijuković, M. Karlo, M. Kuliš, *MATEMATIKA 7, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[2] A. Kirsch, *The fundamental theorem of calculus: visually*? ZDM-Mathematics Education, 2014, 46:691-695.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, 2. dio*, Element, Zagreb, 2006.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio*, Element, Zagreb, 2007.

[5] B. Mikuličić, E. Vernić, M. Varičak, *Zbirka zadataka iz fizike za 1. do 4. razred srednjih škola*, Školska knjiga, Zagreb,

[6] L. Ivanjek, A. Susac, M. Planinic, A. Andrasevic, Z. Milin Sipus, *Student reasoning about graphs in different contexts*, Physical review special topics - Physics education research 2016, 12, 010106.

[7] M. Planinic, A. Susac, L. Ivanjek, Z. Milin Sipus, *Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts*, Physical review special topics - Physics education research, 2013, 9, 020103.

[8] M. Planinic, Z. Milin Sipus, H. Katic, A. Susac, L. Ivanjek, *Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics*, Int. J. Sci. Math. Edu., 2012, 10 (6), 1393-1414.

[9] *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj, opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje (NOK)*, dostupno na http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (lipanj, 2017.).

[10] *Provedeni ispiti u jesenskom roku 2015./2016.: Matematika-osnovna razina*, dostupno na https://www.ncvvo.hr/drzavna-matura-2015-2016-jesenski-rok/ (lipanj, 2017.).

[11] *Provedeni ispiti u ljetnom roku 2016./2017.: Matematika-osnovna razina*, dostupno na https://www.ncvvo.hr/drzavna-matura-2016-2017-ljetni-rok/ (lipanj, 2017.)

[12] S. Antoliš, A. Copić, *MATEMATIKA 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, II. polugodište,* Školska knjiga, Zagreb,20

[13] Susan N. Friel, Frances R. Curcio and George W. Bright, *Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 32, No. 2 (Mar., 2001), pp.124-158.
[14] T. Andreis, M. Plavčić, N. Simić, *FIZIKA 1, udžbenik za 1. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom („varijanta B“)*, Profil, Zagreb, 2007.
[15] T. Kolakovski, *Polinomi i primjene*, Diplomski rad, PMF, Zagreb, 2016.
[16] Ž. Milin Šipuš, *Kako učenici razumiju i primjenjuju grafove linearnih funkcija u matematici i fizici*? (*How do pupils understand and apply line graphs in mathematics and physics*?), KUPM 2014, Čatež, Slovenija, Zbornik radova

# Sažetak

Mnogi podatci prikazani su grafičkim prikazom, a mi smo pozvani interpretirati ih. U ovom radu proučavali smo razumijevanje grafičkog prikaza linearne funkcije u interdisciplinarnom kontekstu. Opisane su strategije i poteškoće učenika i studenata koje su rezultati istraživanja provedenih u srednjoj školi te na sveučilišnoj razini u Hrvatskoj. Naglasak istraživanja bio je na razumijevanju koncepta nagiba pravca i konceptu površine ispod grafa. Uz istraživanje učenika i studenata, spomenuti su i rezultati istraživanja nastavnika fizike o povezanosti matematike i fizike te težini pojedinih zadataka za učenike. Osim navedenih istraživanja, opisane su i neke od preporuka za nastavnike matematike s prilagođenim zadatcima u svrhu poboljšanja razumijevanja grafičkog prikaza te su navedene konkretne aktivnosti u nastavi matematike.

# Summary

Many data are shown in graphs and we are called to interpret them. In this thesis we have studied the understanding of graphical representation of linear function in the interdisciplinary context. The strategies and difficulties of student and university students' are described, which are results of research conducted in high school and university level in Croatia. The emphasis of the research was to understand the concept of line graph slope and the concept of the area under the graph. With the study of students and university students, the results of research of physics teachers about the relation between math and physics and the weight of individual tasks for students are mentioned. In addition to the aforementioned research, some of the recommendations for math teachers with custom assignments have been described for the purpose of improving the understanding of the graphical presentation and specific activities in the teaching of mathematics are outlined.

# Životopis

Rođena sam 24.02.1992. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završila sam u svom rodnom mjestu, u Zlatar Bistrici, 2006. godine. Ne znajući kojim smjerom krenuti u daljnjem obrazovanju, iste godine upisala sam smjer Opća gimnazija u Srednjoj školi Zlatar u gradu Zlataru. Za razliku od većine mojih vršnjaka, ovdje sam zavoljela fiziku i matematiku te odlučila upisati neki tehnički fakultet. Najviše zahvaljujući profesorici matematike, gospođi Boženi Palanović, koja mi je i danas najveći uzor, u zadnji čas sam odabrala matematiku te 2010. godine upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Spletom okolnosti, tada sam imala priliku raditi u Srednjoj školi Zlatar kao profesorica matematike te shvatila da je to moj stvarni poziv. Preddiplomski studij završila sam 2015. godine, te iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički na već spomenutom fakultetu.